Baccalauréat ES Centres étrangers juin 2005

Exercice 1 **3 points**

Commun tous les candidats

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte.
L'exercice consiste à cocher cette réponse exacte sans explication.
Barème : Une bonne réponse rapporte 0,5 point ; une mauvaise réponse enlève 0,25 point.
L abscence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total de points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

QUESTIONS		RÉPONSES CHOISIES
1.	La fonction : $x \longmapsto ex + \ln 2$ a pour dérivée	☐ $x \longmapsto ex$ ☐ $x \longmapsto ex + \frac{1}{2}$ ☐ $x \longmapsto e$
2.	La fonction $x \longmapsto \ln(3x) + \ln 3$ a pour dérivée	☐ $x \longmapsto \frac{1}{3x} + \frac{1}{3}$ ☐ $x \longmapsto \frac{1}{x}$ ☐ $x \longmapsto \frac{1}{3x}$
3.	Sur $\mathbb{R}$, une primitive de la fonction $x \longmapsto e^{-2x+3}$ est	☐ $x \longmapsto -2e^{-2x+3}$ ☐ $x \longmapsto e^{-2x+3}$ ☐ $x \longmapsto -\frac{1}{2}e^{-2x+3}$
4.	Dans $\mathbb{R}$, l'équation : $e^{2x} + e^x - 6 = 0$ possède	☐ 2 solutions ☐ 1 solution ☐ 0 solution
5.	Dans $]0\ ;\ +\infty[$, l'équation : $(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$ possède	☐ 2 solutions ☐ 1 solution ☐ 0 solution
6.	Dans $\mathbb{R}$ l'équation : $1{,}1^x = 2{,}2$ a pour solution le nombre	☐ 2 ☐ $\ln 2$ ☐ $\frac{\ln 2{,}2}{\ln 1{,}1}$

Exercice 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

(*Les probabilités demandées seront exprimées sous forme de fractions irréductibles*)

Une boîte de jeu est constituée de questions portant sur le deux thèmes « Cinéma » ou « Musique ».

Cette boite contient un tiers de questions portant sur le thème « Cinéma », les autres portant sur le thème « Musique ».

Le candidat à ce jeu s'appelle Pierre.

PREMIÈRE PARTIE : Dans cette partie, on pose à Pierre une question choisie au hasard dans la boîte et on sait que :

– La probabilité que Pierre réponde correctement à une question du thème « Cinéma » est égale à $\dfrac{1}{2}$.
– La probabilité que Pierre réponde correctement une question du thème « Musique » est égale à $\dfrac{3}{4}$.

On considère les évènements suivants :
C : la question porte sur le thème « Cinéma »,
M : la question porte sur le thème « Musique.»,
E : Pierre répond correctement à la question posée.

1. Déterminer la probabilité de l'évènement :
« La question porte sur le thème « Musique » et Pierre y a répondu correctement ».

2. Montrer que la probabilité de l'évènement E est égale à $\dfrac{2}{3}$.

3. On suppose que Pierre n'a pas répondu correctement à la question posée ; quelle est la probabilité pour que la question ait porté sur le thème « Cinéma » ?
(*Certaines de ces réponses pourront être justifiées à l'aide d'un arbre de probabilités*)

DEUXIÈME PARTIE : En fait le jeu se déroule de la façon suivante :

On pose à Pierre une première question (selon les modalités décrites dans la première partie) et iI marque 5 points s'il répond correctement et le jeu s'arrête.

Sinon, on lui pose une deuxième question choisie, indépendamment de la première et il marque 2 points s'il répond correctement et le jeu s'arrête.

Sinon, on lui pose une troisième question (choisie indépendamment des deux précédentes) et il marque 1 point s'il répond correctement.

Sinon le jeu s'arrête et il ne marque aucun point.

À chaque fois qu'une question est tirée, on remet dans la boîte une question portant sur le même thème.

1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

2. Définir la loi de probabilité du nombre de points marqués par Pierre.

3. Calculer l'espérance mathématique du nombre de points marqués par Pierre.

EXERCICE 2 — 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On a divisé une population en deux catégories : « fumeurs » et « non-fumeurs ». Une étude statistique a permis de constater que, d'une génération à l'autre,

- 60 % des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
- 10 % des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.

On suppose que le taux de fécondité des fumeurs est le même que celui des non-fumeurs.
On désigne par :

- f_n le pourcentage de fumeurs à la génération de rang n,
- $g_n = 1 - f_n$ a le pourcentage de non-fumeurs à la génération de rang n, où n est un entier naturel.

On considère qu'à la génération 0, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs.
On a donc $f_0 = g_0 = 0{,}5$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.

2. Justifier l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & g_n \end{pmatrix} \times \text{ A où A désigne la matrice : } \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer le pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2.

4. Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.

5. Montrer que : pour tout entier naturel n, $f_{n+1} = 0,5f_n + 0,1$.

6. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = f_n - 0,2$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $f_n = 0,3 \times 0,5^n + 0,2$.

d. Déterminer la limite de la suite (f_n) lorsque n tend vers $+\infty$ et l'interpréter.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Sur la figure ci-dessous on donne les représentations graphiques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de deux fonctions f_1 et f_2 définies et dérivables sur $[0 ; 3]$.

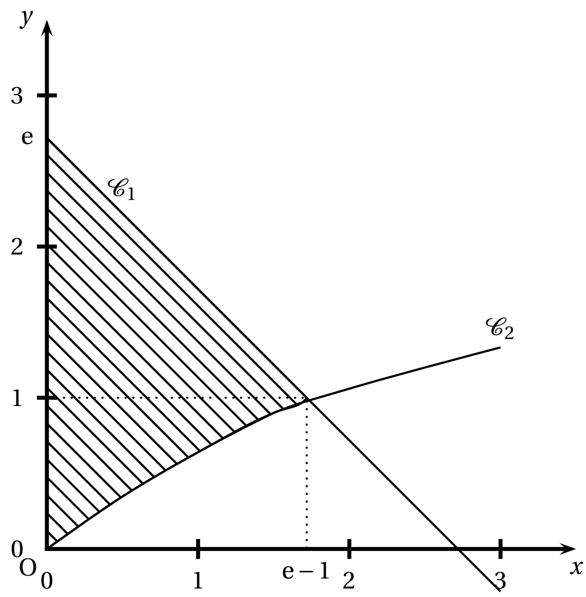

Figure 1

1. L'une des deux courbes représentées ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0 ; 3]$ par $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$.

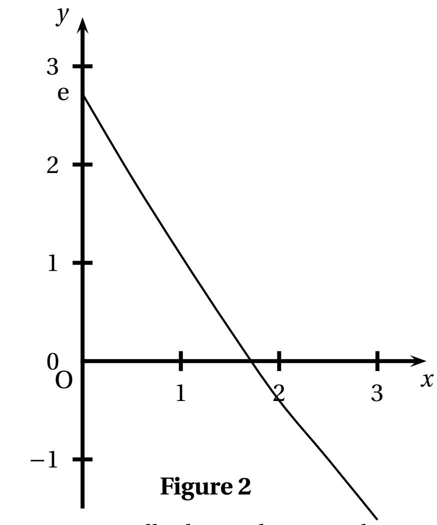

Figure 2

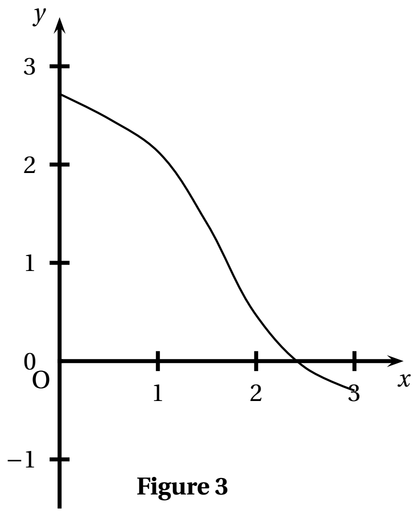

Figure 3

Laquelle de ces deux courbes ne peut pas convenir ?

2. **a.** Donner le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 3]$.

   b. Donner le tableau de signes de la fonction f' dérivée de f sur l'intervalle $[0 ; 3]$.

3. On note F une primitive de f sur $[0 ; 3]$. Indiquer les variations de F sur l'intervalle $[0 ; 3]$.

4. L'une des trois fonctions représentées ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction F.

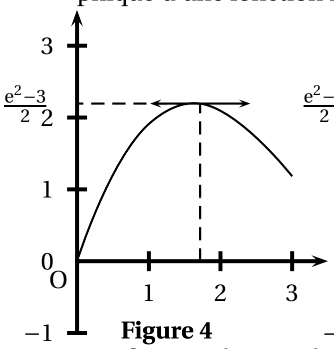

Figure 4

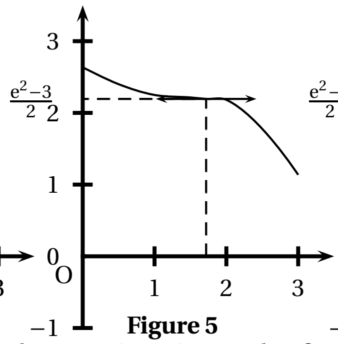

Figure 5

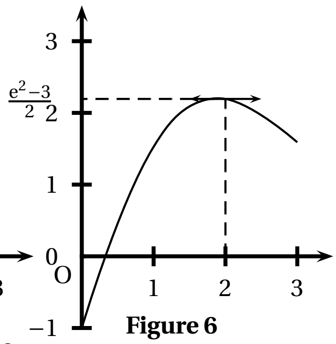

Figure 6

Justifier que les courbes représentées sur les figures 5 et 6 ne peuvent pas convenir.

5. Donner la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^{e-1} f(x)\,dx$.

6. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré sur la figure 1.

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous tes candidats

Un club sportif a été créé en 1998 ; à l'origine le nombre d'adhérents était égal à 600.

Première partie Étude du nombre d'adhérents de 1998 à 2004

On donne, dans le tableau ci-dessous, le nombre d'adhérents de 1998, à 2003 :

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003
rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
nombre d'adhérents y_i	600	690	794	913	1 045	1 207

On pose $Y_i = \ln\left(y_i\right)$ et on réalise un ajustement affine par la méthode des moindres carrés du nuage de points $(x_i\ ;\ Y_i)$.
Une équation de la droite d'ajustement de Y par rapport à x est $Y = 0,14x + 6,397$.
En utilisant cet ajustement,

1. Déterminer une prévision du nombre d'adhérents en 2004.
2. Justifier les affirmations suivantes :

   a. $y_i = 600 \times 1,15^{x_i}$; 600 a été arrondi à l'unité, 1,15 a été arrondi au centième.
   b. De 1998 à 2004, on peut considérer que le nombre d'adhérents a augmenté de 15 % par an.

Deuxième partie : Étude du nombre d'adhérents à partir de l'année 2004
En fait le club a compté 2400 adhérents lors de l'année 2004.
On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3\,600}{1 + 0,5\mathrm{e}^{-x}}.$$

On suppose que le nombre d'adhérents en $(2004 + n)$ est égal à $f(n)$, où n est un entier naturel.

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$ et l'interpréter.
2. On se propose de calculer le nombre moyen d'adhérents M de 2005 à 2009

   a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

Année	2005	2006	2007	2008	2009
n	1	2	3	4	5
$f(n)$	3 040				
Les valeurs de $f(n)$ seront arrondies à l'unité					

   b. Calculer la valeur de M, moyenne du nombre prévisionnel d'adhérents entre 2005 et 2009 (le résultat sera arrondi à l'unité).

3. On considère la fonction F sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$F(x) = 3\,600 \ln\left(\mathrm{e}^x + 0,5\right).$$

   a. Montrer que F est une primitive de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   b. Calculer la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle $[0,5\,;\,5,5]$.
   On pourra constater que les valeurs M et μ sont proches.