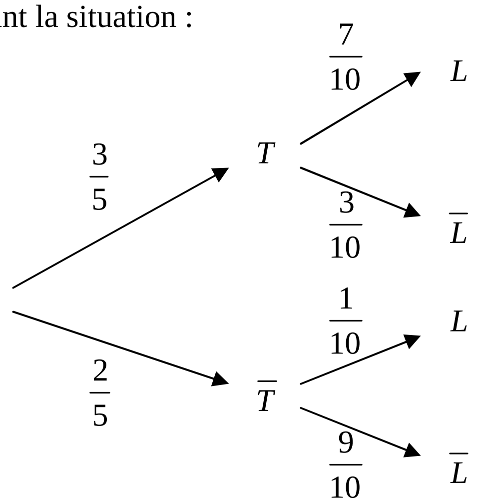
CORRECTION DU SUJET : REUNION JUIN 2005

<u>EXERCICE n°1</u> : ***enseignement obligatoire et de spécialité***

1. Arbre pondéré représentant la situation :



2. La probabilité que la personne achète les deux appareils est donnée par :

$$P(T\cap L)=P_T(L)\times P(T)=\frac{7}{10}\times\frac{3}{5}=\frac{21}{50}.$$

La probabilité que la personne achète le lecteur DVD est donnée par :

$$P(L)=P(T\cap L)+P\left(\overline{T}\cap L\right)=\frac{21}{50}+P_{\overline{T}}(L)\times P\left(\overline{T}\right)=\frac{21}{50}+\frac{1}{10}\times\frac{2}{5}=\frac{23}{50}.$$

La probabilité que la personne n'achète aucun des deux lecteurs est donnée par :

$$P\left(\overline{T}\cap\overline{L}\right)=P_{\overline{T}}\left(\overline{L}\right)\times P\left(\overline{T}\right)=\frac{9}{10}\times\frac{2}{5}=\frac{9}{25}.$$

La probabilité que la personne achète le téléviseur si elle a acheté le lecteur DVD est donnée par :

$$P_L(T)=\frac{P(T\cap L)}{P(L)}=\frac{\frac{21}{50}}{\frac{23}{50}}=\frac{21}{23}.$$

3. Soit D la dépense en euros de la personne.
   a. Si la personne n'achète aucun des deux appareils (événement $\overline{T}\cap\overline{L}$), on a : $D=0$.
   Si la personne achète uniquement le téléviseur (événement $T\cap\overline{L}$), on a :
   $$D=500-\frac{15}{100}\times 500=425.$$
   Si la personne achète uniquement le lecteur DVD (événement $\overline{T}\cap L$), on a :
   $$D=200-\frac{15}{100}\times 200=170.$$
   Si la personne achète les deux appareils (événement $T\cap L$), on a :
   $$D=700-\frac{15}{100}\times 700=525.$$
   L'ensemble des valeurs prises par D est : $\{0;170;425;525\}$.

b. Nous avons :

- $P(D=0)=P\left(\overline{T}\cap\overline{L}\right)=\frac{9}{25}$.
- $P(D=170)=P\left(\overline{T}\cap L\right)=P_{\overline{T}}(L)\times P(L)=\frac{1}{10}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{25}$.
- $P(D=425)=P\left(T\cap\overline{L}\right)=P_{T}\left(\overline{L}\right)\times P(T)=\frac{3}{10}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{50}$.
- $P(D=525)=P(T\cap L)=\frac{21}{50}$.

La loi de probabilité de D est résumée par le tableau suivant :

d_i	0	170	425	525
$P(D=d_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{21}{50}$

c. L'espérance mathématique de D est :

$$E=0\times\frac{9}{25}+170\times\frac{1}{25}+425\times\frac{9}{50}+525\times\frac{21}{50}=\frac{1519}{5}\simeq 303{,}8.$$

On peut espérer une dépense moyenne de 303,80 € par personne entrant dans le magasin.

d. Le responsable du magasin peut espérer effectuer un chiffre d'affaires de $80\times\frac{1519}{5}=24\ 304$ € sur la vente des deux appareils.

<u>EXERCICE n°2</u> : *enseignement obligatoire et de spécialité*

1. Notons (u_n) la population au bout de n années, $n\in\mathbb{N}$.
On a :
$$u_{n+1}=u_n-\frac{2}{100}u_n=0{,}98u_n.$$
Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 0,98 et de premier terme u_0. On peut alors écrire :
$$u_n=u_0\times 0{,}98^n.$$
La population à l'année n est inférieure ou égale à la moitié de la population initiale si et seulement si :
$$u_n\le\frac{u_0}{2}\Leftrightarrow u_0\times 0{,}98^n\le\frac{u_0}{2}\Leftrightarrow 0{,}98^n\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow \ln\left(0{,}98^n\right)\le\ln\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow n\ln(0{,}98)\le-\ln 2$$
$$u_n\le\frac{u_0}{2}\Leftrightarrow n\ge\frac{-\ln 2}{\ln(0{,}98)}\Leftrightarrow n\ge 35.$$

2. Soit t le pourcentage de hausse puis de baisse et soit p le prix initial de l'article.
Le prix après la hausse est : $p\times\left(1+\frac{t}{100}\right)$.
Le prix après la baisse est : $p\times\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1-\frac{t}{100}\right)=p\times\left(1-\frac{t^2}{10000}\right)$.
Or $1-\frac{t^2}{10000}<1$ donc le prix de l'article a finalement baissé.

3. Soit t le taux d'accroissement moyen annuel entre 1960 et 2000 et soit p le nombre d'individus de la population en 1960.
   On a :
   $$p\times\left(1+\frac{t}{100}\right)^{40}=2p \Leftrightarrow \left(1+\frac{t}{100}\right)^{40}=2 \Leftrightarrow \ln\left[\left(1+\frac{t}{100}\right)^{40}\right]=\ln 2 \Leftrightarrow 40\ln\left(1+\frac{t}{100}\right)=\ln 2$$
   $$p\times\left(1+\frac{t}{100}\right)^{40}=2p \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{t}{100}\right)=\frac{\ln 2}{40} \Leftrightarrow e^{\ln\left(1+\frac{t}{100}\right)}=e^{\frac{\ln 2}{40}} \Leftrightarrow 1+\frac{t}{100}=e^{\frac{\ln 2}{40}} \Leftrightarrow t=100\left(e^{\frac{\ln 2}{40}}-1\right)\simeq 1,75\ \%.$$

4. On a :
   $$\left(e^{x}\right)^{2}\times e^{3x-1}=e^{2x}\times e^{3x-1}=e^{2x+3x-1}=e^{5x-1}=e^{5x-1}\times e^{-1}=\frac{e^{5x}}{e}.$$

5. Le nombre -2 est solution de l'équation $\ln\left(e^{x}\right)=-2$.

6. L'ensemble solution de l'inéquation $\ln\left(x+3\right)<\ln 6$ est $\left]-3;3\right[$.

7. On a :
   $$I=\int_{1}^{4}x^{2}dx=\left[\frac{1}{3}x^{3}\right]_{1}^{4}=21.$$

8. On a :
   $$m=\frac{1}{3-1}\int_{1}^{3}\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}\left[\ln x\right]_{1}^{3}=\frac{1}{2}\ln 3=\ln\sqrt{3}.$$

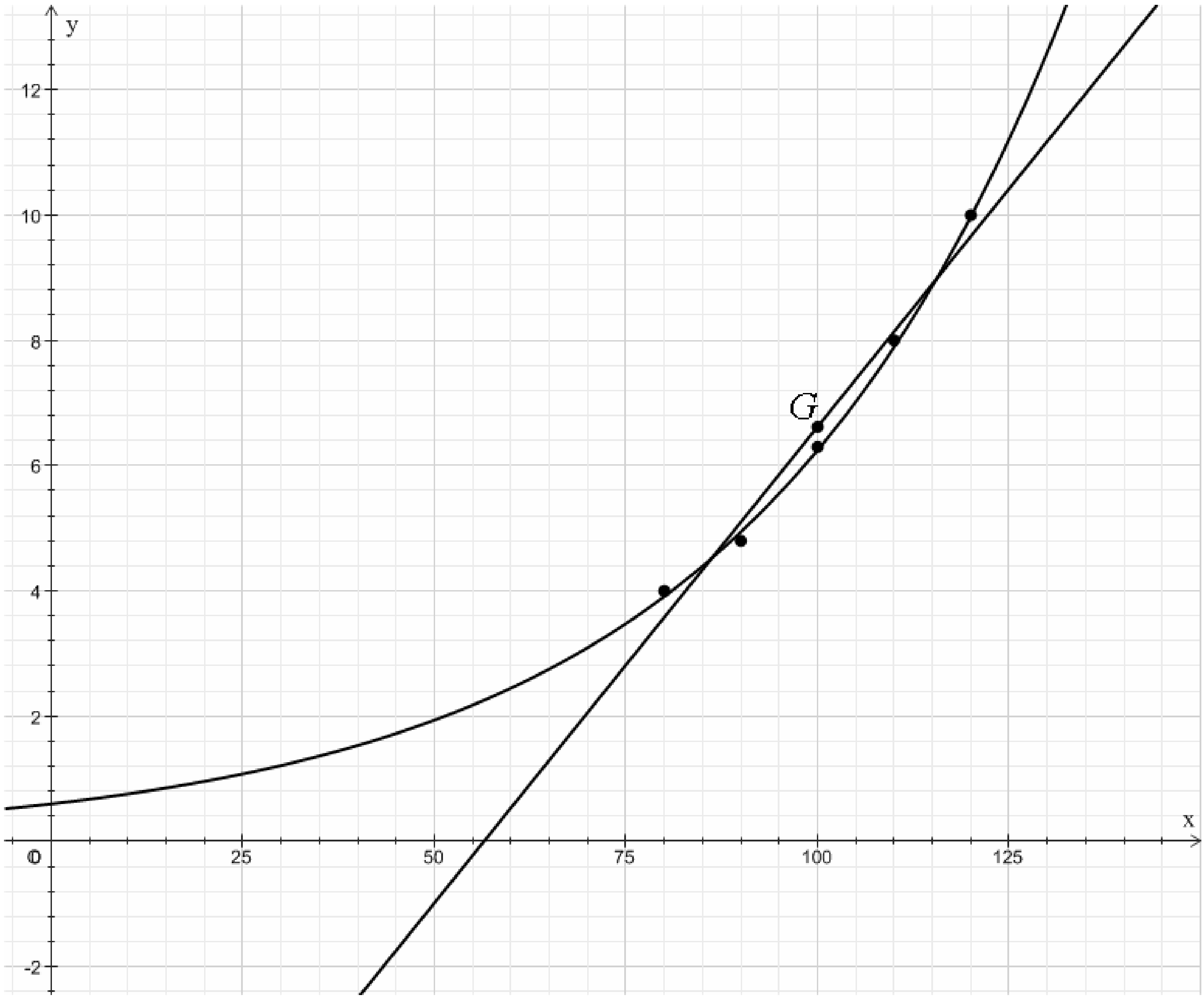
<u>EXERCICE n°3</u> : ***enseignement obligatoire uniquement***

1. Nous avons : $\frac{80}{4}=20$ et $\frac{90}{4,8}=18,75$ donc on peut affirmer que la consommation n'est pas proportionnelle à la vitesse moyenne.

2. Représentation graphique : voir ci-dessous.
   $G\left(100;6,62\right)$.
   Une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés est : $y=0,152x-8,58$.
   En utilisant cet ajustement, on obtient que la consommation estimée aux 100 km pour une vitesse de 130 km/h est : $0,152\times 130-8,58=11,2$ litres.

3. On pose : $z=\ln y$.
   La droite d'ajustement affine de z en x est : $z=0,0234x-0,508$.
   On en déduit que :
   $$\ln y=0,0234x-0,508 \Leftrightarrow e^{\ln y}=e^{0,0234x-0,508} \Leftrightarrow y=e^{0,0234x}\times e^{-0,508} \Leftrightarrow y=0,6017e^{0,0234x}.$$
   Avec cet ajustement, on obtient que la consommation moyenne aux 100 km pour une vitesse moyenne de 130 km/h est : $0,6017e^{0,0234\times 130}=12,6$ litres.

4. L'ajustement exponentiel semblant plus pertinent que l'ajustement affine, la consommation réelle semble plus proche de 12,6 litres aux 100 km que de 11,2 litres.



<u>EXERCICE n°3</u> : ***enseignement de spécialité uniquement***

1. Soit u_n le nombre d'employés au premier janvier de l'année $2005+n$.
   a. On a :
   - $u_0 = 1500$.
   - $u_1 = u_0 - \dfrac{10}{100}u_0 + 100 = 1450$.
   - $u_2 = u_1 - \dfrac{10}{100}u_1 + 100 = 1405$.
   - $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
   - $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

   b. On a :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{10}{100}u_n + 100 = 0,9u_n + 100 .$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 1000$.
   a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 1000 \Leftrightarrow v_{n+1} = 0,9u_n + 100 - 1000 \Leftrightarrow v_{n+1} = 0,9u_n - 900 \Leftrightarrow v_{n+1} = 0,9v_n$.
      Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = u_0 - 1000 = 500$.
   b. Du résultat précédent, on déduit que :
      $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 0,9^n$ et $u_n = 500 \times 0,9^n + 1000$.
   c. Nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(0,9^n\right) = 0$ car $0 < 0,9 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1000$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $u_{n+1} - u_n = 500 \times 0,9^{n+1} + 1000 - \left(500 \times 0,9^n + 1000\right) = 500 \times 0,9^n \times (0,9 - 1) = -50 \times 0,9^n < 0$.
   Donc la suite (u_n) est décroissante.

4. Au premier janvier 2005, l'entreprise compte un sureffectif de 300 employés.
   L'effectif attendu est donc $1500 - 300 = 1200$ employés.
   $u_n \leq 1200 \Leftrightarrow 500 \times 0,9^n + 1000 \leq 1200 \Leftrightarrow 0,9^n \leq \frac{2}{5} \Leftrightarrow \ln\left(0,9^n\right) \leq \ln\left(\frac{2}{5}\right) \Leftrightarrow n \ln 0,9 \leq \ln\left(\frac{2}{5}\right)$
   $u_n \leq 1200 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}{\ln 0,9} \Leftrightarrow n \geq 9.$
   C'est à partir de la neuvième année, c'est à dire en 2014, que l'enttreprise ne sera plus en sureffectif.

<u>EXERCICE n°4</u> : ***enseignement obligatoire et de spécialité***

Soit la fonction f définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$.

1. Signe de $f'(x)$:
   On a :
   $$f'(x) = -\frac{1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}}{(x \ln x)^2} = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2}.$$
   et :
   - $\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x > \ln\left(e^{-1}\right) \Leftrightarrow x > e^{-1} = \frac{1}{e}$;
   - $x \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$;

   d'où le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$\ln x + 1$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$(x \ln x)^2$	‖	$+$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	

   Limite en 0 :
   $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x \ln x) = 0^- \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$.

Limites en 1 :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(x\right)=1\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(\ln x\right)=0^-\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(x\ln x\right)=0^-\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f\left(x\right)=-\infty .$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(x\right)=1\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(\ln x\right)=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(x\ln x\right)=0^+\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f\left(x\right)=+\infty .$$

Limite en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x\right)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln x\right)=+\infty\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=0 .$$

Image de $\frac{1}{e}$: $f\left(\frac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)}=\dfrac{e}{\ln\left(\frac{1}{e}\right)}=\dfrac{e}{\ln 1-\ln e}=-e$.

2. La courbe $\left(C\right)$ possède :
   - 2 asymptotes verticales : $x=0$ et $x=1$;
   - 1 asymptote horizontale : $y=0$.
3. Equation de la tangente à $\left(C\right)$ au point d'abscisse $\frac{1}{e}$:

   $$y=f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x-\frac{1}{e}\right)+f\left(\frac{1}{e}\right)=0\times\left(x-\frac{1}{e}\right)-e=-e .$$

   Equation de la tangente à $\left(C\right)$ au point d'abscisse e :

   $$y=f'(e)(x-e)+f(e)=-\frac{2}{e^2}\times(x-e)+\frac{1}{e}=-\frac{2}{e^2}x+\frac{3}{e} .$$
4. L'équation $f\left(x\right)=k$ possède :
   - aucune solution si $k\in\left]-e;0\right]$;
   - une solution unique si $k\in\left]0;+\infty\right[$ *ou* $k=-e$.
   - deux solutions distinctes si $k\in\left]-\infty;-e\right[$.
