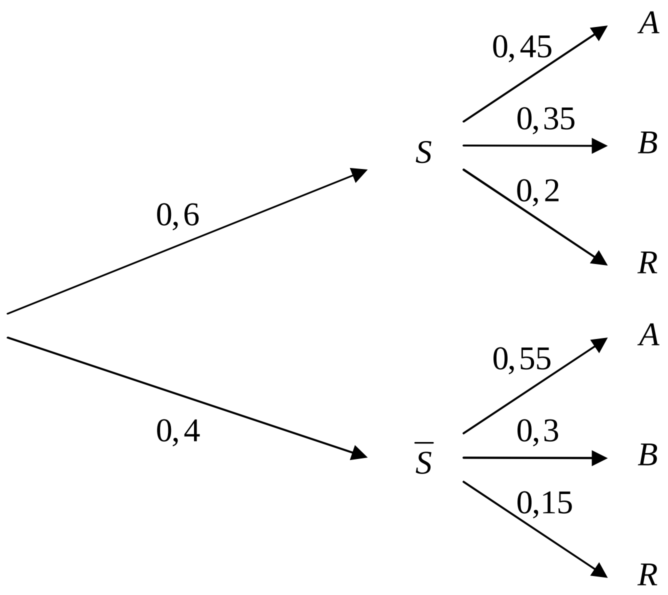
CORRECTION DU SUJET : PONDICHERY 2005

<u>EXERCICE n°1</u> : *enseignement obligatoire et de spécialité*

1. Arbre pondéré traduisant la situation :



2. La probabilité que le client ait loué un deux pièces est :
$$P\left(\overline{S}\right)=1-P\left(S\right)=1-0,6=0,4.$$
Nous avons :
$$P_S\left(B\right)+P_S\left(A\right)+P_S\left(R\right)=1\Leftrightarrow P_S\left(B\right)=1-0,45-0,2=0,35.$$
3. Nous avons :
$$P\left(R\cap S\right)=P\left(S\right)\times P_S\left(R\right)=0,2\times 0,6=0,12.$$
De plus :
$$P\left(R\right)=P\left(R\cap S\right)+P\left(R\cap\overline{S}\right)\Leftrightarrow P\left(R\cap\overline{S}\right)=0,18-0,12=0,06.$$
Et :
$$P_{\overline{S}}\left(R\right)=\frac{P\left(R\cap\overline{S}\right)}{P\left(\overline{S}\right)}=\frac{0,06}{0,4}=0,15.$$
4. Nous avons :
$$P\left(A\right)=P\left(A\cap S\right)+P\left(A\cap\overline{S}\right)=P\left(S\right)\times P_S\left(A\right)+P\left(\overline{S}\right)\times P_{\overline{S}}\left(A\right)=0,45\times 0,6+0,55\times 0,4=0,49.$$
La moitié des clients choisit la formule Simple.
5. Loi de probabilité :

L_i	350	370	390	480	500	520
p_i	0,12	0,27	0,21	0,06	0,22	0,12

L’espérance est :
$$E\left(L\right)=0,12\times 350+0,27\times 370+0,21\times 390+0,06\times 480+0,22\times 500+0,12\times 520=425.$$
Conclusion :
En moyenne le coût d’une semaine de location pour un client est de 425 €.

<u>EXERCICE n°2</u> : ***enseignement obligatoire et de spécialité***

1. La fonction f est définie par $f(x)=-2x+1-\dfrac{8}{x-4}$ sur $]4;+\infty[$.

$$f(x)=-2x+1-\frac{8}{x-4}=\frac{(-2x+1)(x-4)-8}{x-4}=\frac{-2x^2+9x-12}{x-4}=\frac{-\left(2x^2-9x+12\right)}{x-4}=\frac{2x^2-9x+12}{4-x}.$$

2. Pour $x\in\ ]4;+\infty[$:

$$f'(x)=-2-8\times\frac{-1}{(x-4)^2}=-2+\frac{8}{(x-4)^2}=\frac{-2(x-4)^2+8}{(x-4)^2}=\frac{-2x^2+16x-24}{(x-4)^2}.$$

3. On a :

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\substack{x\to4\\x<4}}(-2x+1)=-7\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to4\\x<4}}(x-4)=0^-\Rightarrow\lim_{\substack{x\to4\\x<4}}\left(\frac{8}{x-4}\right)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{\substack{x\to4\\x<4}}f(x)=+\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\substack{x\to4\\x>4}}(-2x+1)=-7\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to4\\x>4}}(x-4)=0^+\Rightarrow\lim_{\substack{x\to4\\x>4}}\left(\frac{8}{x-4}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{\substack{x\to4\\x>4}}f(x)=-\infty.$$

Conclusion :

La droite d'équation $x=4$ est asymptote verticale à la courbe (Γ).

4. On a :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-2x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{8}{x-4}\right)=0$ donc la droite d'équation $y=-2x+1$ est asymptote à la courbe (Γ) en $+\infty$.

5. Une primitive F sur de la fonction f sur $]4;+\infty[$ est :

$$F(x)=-x^2+x-8\ln(x-4).$$

<u>EXERCICE n°3</u> : ***enseignement obligatoire et de spécialité***

Partie A

1. Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln x-\sqrt{x}$.

On a :

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2-\sqrt{x}}{2x}.$$

2. Sur $]0;+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $2-\sqrt{x}$.

On a :

$$2-\sqrt{x}>0\Leftrightarrow-\sqrt{x}>-2\Leftrightarrow\sqrt{x}<2\Leftrightarrow x<4.$$

Tableau de variation de la fonction f :

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|$	$\nearrow$	$f(4)$	$\searrow$	

$$f(4) = 2\ln 2 - 2 < 0.$$

$f(4) < 0$ est le maximum de la fonction f sur $]0;+\infty[$ alors : $f(x) \leq 0$ c'est à dire $\ln x \leq \sqrt{x}$.

Partie B

1. Pour tout $x > 1$, $\dfrac{1}{x} > 0$ et $\ln x > 0$ donc $\dfrac{\ln x}{x} > 0$.

   Pour tout $x > 1$, on a montré que $\ln x \leq \sqrt{x}$ donc : $\dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{\sqrt{x}}{x} \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

   Conclusion :
$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
2. Nous avons :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0.$$

<u>EXERCICE n°4</u> : ***enseignement obligatoire et de spécialité***

Partie A

1. Une équation de la droite d'ajustement de y en x est : $y = 1,06x + 15,75$.
   Voir représentation graphique ci-dessous.
2. L'année 2003 correspond au rang 33 et $1,06 \times 33 + 15,75 = 50,73$ donc la population en 2003 peut être estimée à 51 000 habitants, à un millier près.

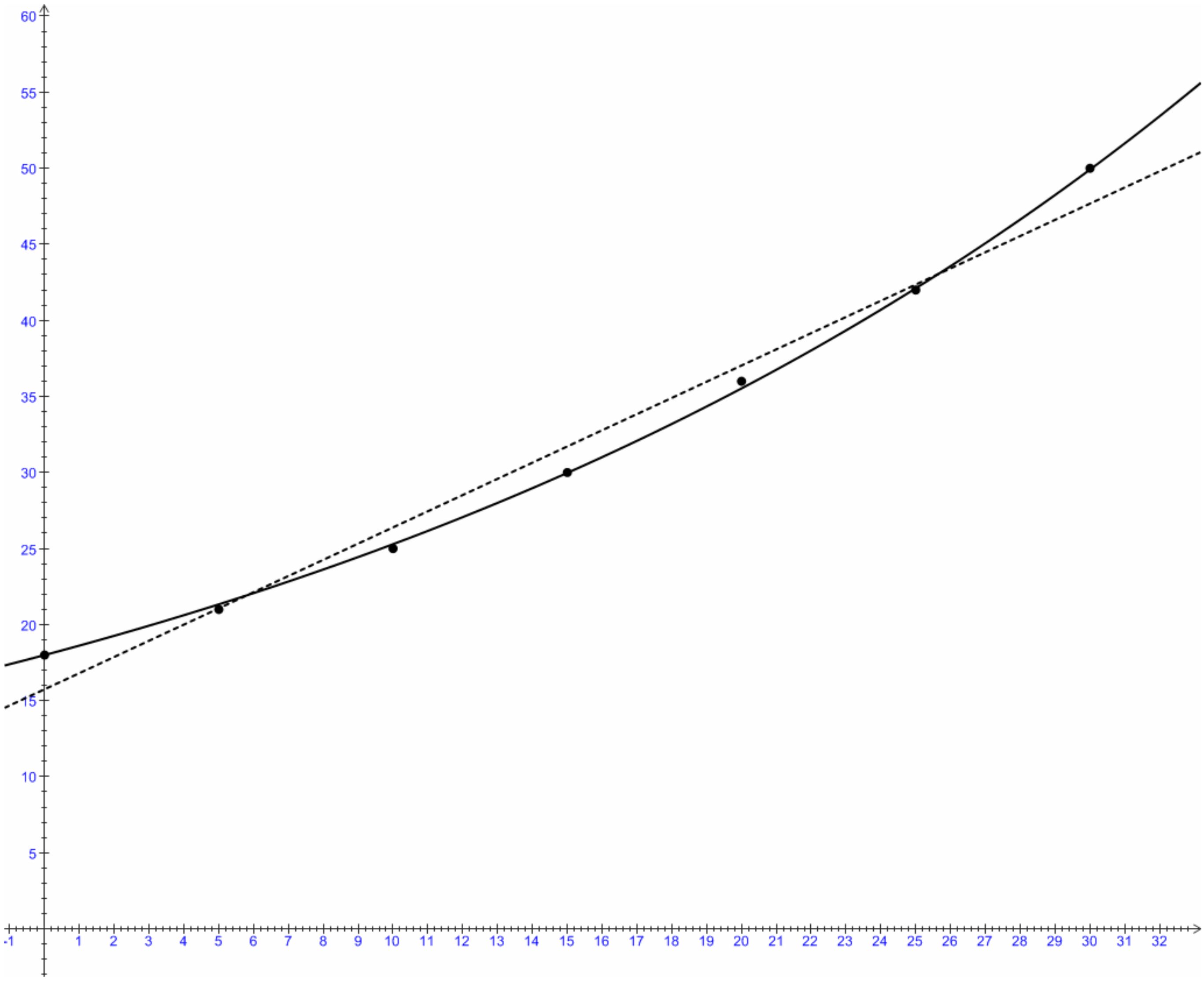
Partie B

1. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = ae^{bx}$.

$$\begin{cases} f(0) = 18 \\ f(30) = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ae^{0} = 18 \\ ae^{30b} = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ 18e^{30b} = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ e^{30b} = \dfrac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ 30b = \ln\left(\dfrac{25}{9}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ b = \dfrac{\ln\left(\dfrac{25}{9}\right)}{30} \end{cases}.$$

$$\frac{\ln\left(\frac{25}{9}\right)}{30} \simeq 0,034 \text{ donc } f(x) = 18e^{0,034x}.$$

2. Puisque $18e^{0,034\times 33} \simeq 55,278$, on en dédit que la population en 2003 est estimée à 55 000 milles habitants.
3. Représentation graphique :



4. la population en 2003 était de 55 milliers d'habitants. L'estimation obtenue avec le second ajustement est plus proche que celle obtenue avec le premier. Le second ajustement semble plus pertinent.

Partie C

1. La valeur moyenne est :

$$m = \frac{1}{30-0}\int_0^{30} f(x)dx = \frac{1}{30}\left[\frac{18}{0,034}e^{0,034x}\right]_0^{30} = \frac{18}{1,02}\left(e^{1,02}-1\right) \simeq 31,3.$$

2. La droite d'équation $y = 31,3$ est sécante à la courbe représentative de f au point d'abscisse 16,3. c'est au cours de l'année 1986 que la population atteint cette valeur moyenne.