CORRECTION DU SUJET : POLYNESIE JUIN 2005

EXERCICE n°1 : ***enseignement obligatoire et de spécialité***

1. Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = -e^{-\frac{x}{2}+4} + 30$.

   Soit s la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées y_i et les valeurs approchées $f(x_i)$.

   Nous avons :

   $$s = \left(-25 - f(0)\right)^2 + \left(-3{,}111 - f(1)\right)^2 + \left(9{,}892 - f(2)\right)^2 + \left(17{,}788 - f(3)\right)^2$$
   $$+\left(22{,}598 - f(4)\right)^2 + \left(25{,}566 - f(5)\right)^2 = 0{,}165.$$

   Puisque $s < 0{,}5$, on peut affirmer que l'approximation par f est satisfaisante.

2. Nous avons :

   $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{x}{2}+4\right) = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 30.$$

   On en déduit que la droite (D) d'équation $y = 30$ est asymptote horizontale à la courbe (C_f) en $+\infty$.

   On a :

   $$f(x) - 30 = -e^{-\frac{x}{2}+4} < 0 \text{ donc la courbe } (C_f) \text{ est en dessous de la droite } (D).$$

3. On a :

   $$f'(x) = -\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}+4} = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}+4}.$$

   Tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$f(0)$ $\nearrow$	$+\infty$

   $$f(0) = 30 - e^4.$$

   Le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0 est :

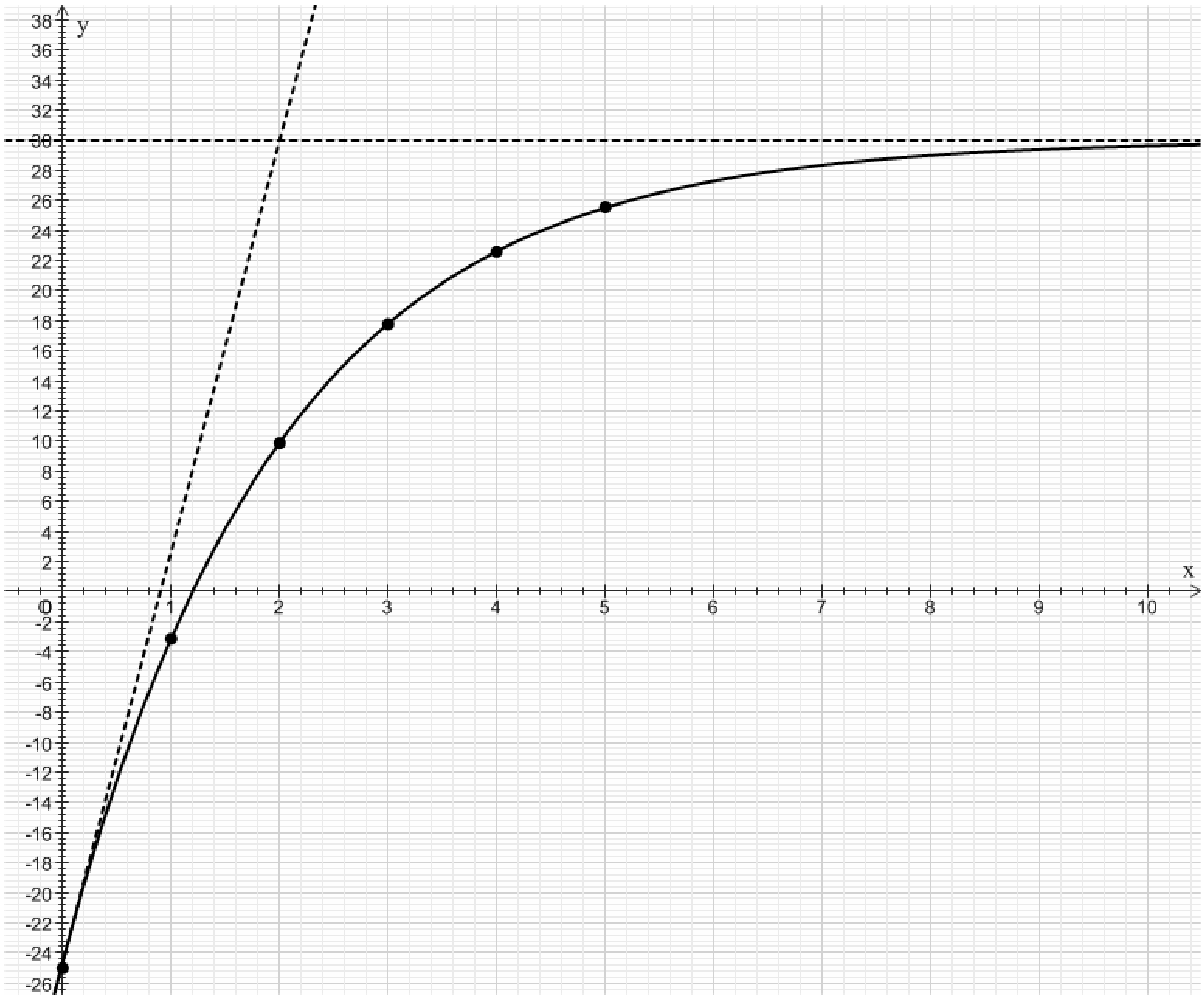
   $$f'(0) = \frac{1}{2}e^4.$$

4. On résout l'inéquation :

   $$f(x) \geq 29{,}8 \Leftrightarrow -e^{-\frac{x}{2}+4} + 30 \geq 29{,}8 \Leftrightarrow -e^{-\frac{x}{2}+4} \geq -0{,}2 \Leftrightarrow e^{-\frac{x}{2}+4} \leq 0{,}2$$
   $$f(x) \geq 29{,}8 \Leftrightarrow \ln\left[e^{-\frac{x}{2}+4}\right] \leq \ln 0{,}2 \Leftrightarrow -\frac{x}{2}+4 \leq \ln 0{,}2 \Leftrightarrow x \geq 2\left(4 - \ln 0{,}2\right) \simeq 11{,}2.$$

C'est en janvier $1999+12=2011$ que le bénéfice dépassera les 29 800 euros.

Représentation graphique :



<u>EXERCICE n°2</u> : ***enseignement obligatoire uniquement***

1. Notons p_b, p_w et p_r les proportions respectives de jetons bleus, blancs et rouges dans l'urne.
   On a :
   $p_b = 0{,}1$; $p_w = 3p_b$ et $p_b + p_w + p_r = 1$ donc $p_w = 0{,}3$ et $p_r = 0{,}6$.

   Le gain de base est supposé égale à 2 euros.
   a. La loi de probabilité est résumée par le tableau suivant :

g_i	2	4	-8
p_i	0,6	0,3	0,1

   b. Le gain moyen est donné par :
   $E = 2\times 0{,}6 + 4\times 0{,}3 - 8\times 0{,}1 = 1{,}6$ soit 1,6 euros.

2. Soit x le gain de base exprimé en euros.
   a. La loi de probabilité correspondante est alors :

g_i	x	x^2	$-x^3$
p_i	0,6	0,3	0,1

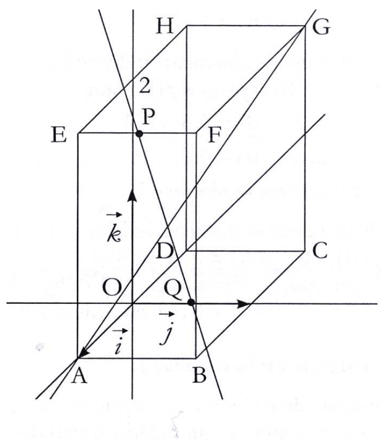
   Le gain moyen réalisé est alors donné par : $E = 0,6x + 0,3x^2 - 0,1x^3 = f(x)$.

   b. On a :
   $$f'(x) = -0,3x^2 + 0,6x + 0,6 = 0,3\left(-x^2 + 2x + 2\right).$$
   c. $f'(x)$ s'annule pour $x_1 = 1 + \sqrt{3} > 0$ et $x_2 = 1 - \sqrt{3} < 0$.

x	0		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	

   d. On a $x_1 \simeq 2,73$ donc le gain moyen est maximal pour un gain de base de 2,73 euros.

<u>EXERCICE n°2</u> : ***enseignement de spécialité uniquement***



1. Plan $(EFGH)$: $z = 2$.
   Plan (ABF) : $x = 1$.
   Droite (EF) : $\begin{cases} z = 2 \\ x = 1 \end{cases}$.
2. $A(1;0;0)$; $G(-1;1;2)$; $E(1;0;2)$; $F(1;1;2)$; $P\left(1;\frac{1}{2};2\right)$.
   Le plan (APQ) admet une équation de la forme $ax + by + cz = d$.

$$\begin{cases} A \in (APQ) \\ P \in (APQ) \\ Q \in (APQ) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ a + \frac{1}{2}b + 2c = d \\ \frac{1}{2}b = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ b = 2d \\ c = -\frac{1}{2}d \end{cases} \overset{d=2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = -1 \end{cases} \quad soit \quad 2x + 4y - z = 2.$$

3. $2 \times (-1) + 4 \times 1 - 2 = 0 \neq 2$ donc G n'appartient pas au plan (APQ).
4. G n'appartient pas au plan (APQ) donc les droites (AG) et (PQ) ne sont pas coplanaires
   Le point d'intersection de ces droites n'existe pas donc le logiciel signalera un message d'erreur.

<u>EXERCICE n°3</u> : ***enseignement obligatoire et de spécialité***

1. $P(A\cup B)=0,7+0,5-0,2=1$.
2. $P(A\cap B)\overset{\textit{indépendants}}{=}P(A)\times P(B)=0,3\times 0,2=0,06$.
3. Si A et B sont deux événements incompatibles mais non impossibles alors :
   $P(A\cap B)=0$ et $P(A)\neq 0$ et $P(B)\neq 0$.

   Or si A et B sont deux événements indépendants, on a : $P(A\cap B)\overset{\textit{indépendants}}{=}P(A)\times P(B)$.

   Puisque $P(A)\neq 0$ et $P(B)\neq 0$, cette affirmation est fausse.
4. La probabilité cherchée est : $\left(1-(1-0,35)^4\right)=1-0,65^4\simeq 0,821$.

<u>EXERCICE n°4</u> : ***enseignement obligatoire et de spécialité***

1. $(C_{f'})$ est en dessous de l'axe des abscisses sur $[-2;-0,75]\cup[4,83;10]$.

   On a :
   $y=F'(5)(x-5)+F(5)=f(5)(x-5)+F(5)=1,9(x-5)+5,43=1,9x-4,07$.

   On a :
   $F'(x)=f(x)$
   - F est croissante sur $[-2;-1,8]$ et sur $[1;10]$.
   - F est décroissante sur $[-1,8;1]$.
2. On a :

$$I=\int_1^5 f(t)\,dt=\left[F(t)\right]_1^5=F(5)-F(1)=5,43-0=5,43.$$

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt=\frac{1}{4}\int_1^5 f(t)\,dt=\frac{1}{4}\times 5,43\simeq 1,3575.$$
