

# CORRECTION Baccalauréat ES France septembre 2003

## EXERCICE n°1 : Commun à tous les candidats (6 pts)

### PARTIE A

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = x^2 + 4 - 8 \ln x$ .

1. Limite en 0 et  $+\infty$  :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 4) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

On a :

$$f(x) = x^2 \left( 1 + \frac{4}{x^2} - 8 \frac{\ln x}{x^2} \right) \text{ alors } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^2} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x^2} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{4}{x^2} - 8 \frac{\ln x}{x^2} \right) = 1 \left. \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

2. On a :

$$f'(x) = 2x - 8 \times \frac{1}{x} = \frac{2(x^2 - 4)}{x}.$$

Tableau de signe de la dérivée :

|           |   |   |   |           |
|-----------|---|---|---|-----------|
| $x$       | 0 | 2 | + | $+\infty$ |
| $x^2 - 4$ | - | 0 | + |           |
| $x$       | 0 | + | + |           |
| $f'(x)$   | - | 0 | + |           |

Conclusion :

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ si } x = 2 \\ f'(x) > 0 \text{ si } x \in ]2; +\infty[ \\ f'(x) < 0 \text{ si } x \in ]0; 2[ \end{cases}$$

Tableau de variation :

|         |           |        |   |           |
|---------|-----------|--------|---|-----------|
| $x$     | 0         | 2      | + | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0      | + |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f(2)$ |   | $+\infty$ |

$$f(2) = 8(1 - \ln 2).$$

Conclusion :

La fonction  $f$  est décroissante sur  $]0; 2[$  et croissante sur  $]2; +\infty[$ .

3. On a :

$$G(x) = x \ln x - x \text{ alors } G'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x.$$

On remarque que  $f(x) = x^2 + 4 - 8G'(x)$  alors  $F(x) = \frac{x^3}{3} + 4x - 8G(x) + c = \frac{x^3}{3} + 12x - 8x \ln x + c.$

$$F(1) = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{37}{3} \text{ soit } F(x) = \frac{x^3}{3} + 12x - 8x \ln x - \frac{37}{3}.$$

### PARTIE B

1. D'après la question A.2.b, il est préférable d'acheter en janvier 2002 et l'action vaudra  $8(1 - \ln 2) = 2,5$  dizaines d'euros soit 25 € donc une dépense de 62 500 €.

2. On a :

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{10} \int_1^{11} f(x) dx = \frac{1}{10} [F(11) - F(1)] \text{ or } F(11) = \frac{1690}{3} - 88 \ln 11 \text{ et}$$

$$F(1) = 0 \text{ d'où : } m = \frac{1690}{30} - \frac{88}{10} \ln 11 = 35,2.$$

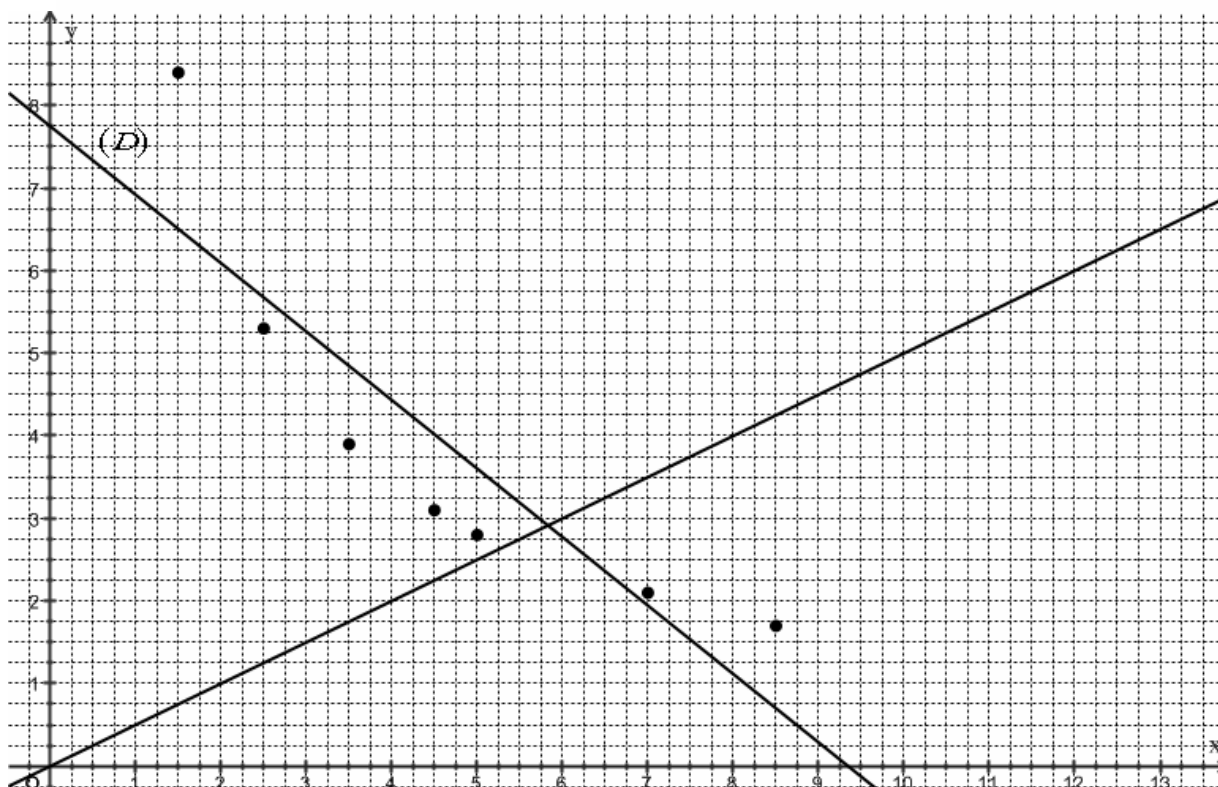
Cela signifie que le prix moyen de l'action entre le 1<sup>er</sup> janvier et le 1<sup>er</sup> novembre sera de 322 €.

### EXERCICE n°2 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (5 pts)

1. On vérifie facilement que  $z$  est proportionnelle à  $x$  :  $z = \frac{x}{2} = g(x).$

La représentation graphique de la fonction  $g$  est une droite d'équation  $y = \frac{x}{2}.$

2. Représentation du nuage de points ;



Une équation de la droite (D) est :  $y = -0,83x + 7,75$ .

L'offre est égale à la demande lorsque :  $-0,83x + 7,75 = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 5,83$  d'où un prix d'équilibre de 5,83 €.

3. Tableau :

|             |      |      |      |      |      |      |      |
|-------------|------|------|------|------|------|------|------|
| $X = \ln x$ | 0,41 | 0,92 | 1,25 | 1,50 | 1,61 | 1,95 | 2,14 |
| $Y = \ln y$ | 2,13 | 1,67 | 1,36 | 1,13 | 1,03 | 0,74 | 0,53 |

On a :  $Y = -0,92X + 2,51$  soit  $\ln y = -0,92 \ln x + 2,51$  c'est à dire  $y = e^{-0,92 \ln x + 2,51}$ .

On résout l'équation suivante :  $e^{-0,92 \ln x + 2,51} = \frac{x}{2}$

$$e^{-0,92 \ln x + 2,51} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow -0,92 \ln x + 2,51 = \ln\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow 0,92 \ln x + \ln\left(\frac{x}{2}\right) = 2,51 \Leftrightarrow \ln(x^{0,92}) + \ln\left(\frac{x}{2}\right) = 2,51$$

$$e^{-0,92 \ln x + 2,51} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \ln\left(x^{0,92} \times \frac{x}{2}\right) = 2,51 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x^{1,92}}{2}\right) = 2,51 \Leftrightarrow \frac{x^{1,92}}{2} = e^{2,51} \Leftrightarrow x^{1,92} = 2e^{2,51}$$

$$e^{-0,92 \ln x + 2,51} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow 1,92 \ln x = \ln(2e^{2,51}) \Leftrightarrow \ln x = \frac{\ln(2e^{2,51})}{1,92} \Leftrightarrow x = e^{\frac{\ln(2e^{2,51})}{1,92}} = 5,30.$$

soit un prix d'équilibre de 5,30 €.

**EXERCICE n°2 : Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité (5 pts)**

Soit  $z = x^2 + 2y^2 - 6x - 4y + 13$ .

1. On a :  $50 \leq z \leq 60$ . Par le calcul  $z = 53$ .

2. Il suffit de développer et de vérifier que  $z = x^2 + 2y^2 - 6x - 4y + 13$ .

Le coût est minimal pour 3 tonnes de produits E et une tonne de produits F soit 2 000 €.

3. Il suffit de remplacer  $y$  par  $7 - x$  dans  $z = x^2 + 2y^2 - 6x - 4y + 13$  et on obtient  $z = 3x^2 - 30x + 83$ .

On a :  $g'(x) = 6x - 30 = 6(x - 5)$  d'où le tableau de variation suivant :

|         |    |   |   |    |
|---------|----|---|---|----|
| $x$     | 0  | 5 | 7 |    |
| $g'(x)$ |    | - | 0 | +  |
| $g(x)$  | 83 |   | 8 | 20 |

Conclusion :

La fonction  $g$  est décroissante sur  $[0;5]$  et croissante sur  $[5;7]$ .

La fonction  $g$  admet un minimum pour 5 donc cela correspond à un coût minimal de 8 000 € soit pour 5 tonnes de produits E et 2 tonnes de produits F.

**PROBLEME : Commun à tous les candidats (9 pts)**

**Partie A**

I. Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0;1]$  par :  $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{x+1} - 1$ .

1. Déterminons la dérivée de la fonction  $f$  et dressons son tableau de variations :  
On a :

$$f'(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{3(x+1)^2 - 2}{2(x+1)^2} = \frac{3(x^2 + 2x + 1) - 2}{2(x+1)^2} = \frac{3x^2 + 6x + 1}{2(x+1)^2} > 0.$$

Tableau de variations :

|         |   |   |
|---------|---|---|
| $x$     | 0 | 1 |
| $f'(x)$ | + |   |
| $f(x)$  | 0 | 1 |

Conclusion :

La fonction  $f$  est croissante sur  $[0;1]$ .

2. Etudions le signe de  $x - f(x)$  :

On a :

$$x - f(x) = x - \left( \frac{3}{2}x + \frac{1}{x+1} - 1 \right) = x - \frac{3}{2}x - \frac{1}{x+1} + 1 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{x+1} + 1$$

$$x - f(x) = \frac{-x(x+1) - 2 + 2(x+1)}{2(x+1)} = \frac{-x^2 + x}{2(x+1)} = \frac{x(1-x)}{2(x+1)} \geq 0 \text{ sur } [0;1].$$

3. Conclusion :

- $f$  est définie sur  $[0;1]$  ;
- $f$  est croissante sur  $[0;1]$  ;
- $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$  ;
- Pour tout  $x$  de  $[0;1]$  :  $x - f(x) \geq 0$  soit  $x \geq f(x)$

Alors la courbe représentant la fonction  $f$  est une courbe de Lorenz.

II. Soit la fonction  $g$  définie sur  $[0;1]$  par :  $g(x) = e^x - (e-2)x - 1$ .

On a :

$$g'(x) = e^x - (e-2) \text{ et } g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - (e-2) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq (e-2) \Leftrightarrow x \geq \ln(e-2) \approx -0,33.$$

Tableau de variations :

|         |   |   |
|---------|---|---|
| $x$     | 0 | 1 |
| $g'(x)$ | + |   |
| $g(x)$  |   |   |

Conclusion :

La fonction  $g$  est croissante sur  $[0;1]$ .

Soit la fonction  $h$  définie sur  $[0;1]$  par :  $h(x) = -e^x + (e-1)x + 1$ .

Tableau de variations :

|         |   |            |   |
|---------|---|------------|---|
| $x$     | 0 | $\ln(e-1)$ | 1 |
| $h'(x)$ | + | 0          | - |
| $h(x)$  |   |            |   |

$$h[\ln(e-1)] = -e^{\ln(e-1)} + (e-1)\ln(e-1) + 1.$$

On a :

$$x - g(x) = x - [e^x - (e-2)x - 1] = h(x).$$

De plus la fonction  $h(x) \geq 0$  soit  $x \geq g(x)$ .

Conclusion :

- $g$  est définie sur  $[0;1]$  ;
- $g$  est croissante sur  $[0;1]$  ;
- $g(0) = 0$  et  $g(1) = 1$  ;
- Pour tout  $x$  de  $[0;1]$  :  $x \geq g(x)$

Alors la courbe représentant la fonction  $g$  est une courbe de Lorens.

### Partie B

1.  $g(0,5) = 0,29$ .

50 % des exploitations les plus petites représentent au total 29 % de la superficie des exploitations du pays G.

2. On a :

$$A = \frac{1}{2} - \int_0^1 g(x) dx \text{ avec } G(x) = e^x - \frac{(e-2)x^2}{2} - x, G(1) = e - \frac{(e-2)}{2} - 1 = \frac{e}{2} \text{ et } G(0) = 1$$

$$\text{d'où : } A = \frac{3-e}{2} \text{ u.a. et } \gamma_G = 2A = 0,28.$$

En procédant comme précédemment, on obtient :

$$\gamma_F = 0,12 \text{ avec } F(x) = \frac{3x^2}{4} + \ln(x+1) - x.$$

Pour le pays F la répartition est la plus égalité car  $\gamma_F \leq \gamma_G$ . On aurait pu le prévoir car la courbe (C) est la plus proche de la droite d'équation  $y = x$ .