

# CORRECTION DU SUJET : FRANCE JUIN 2005

## EXERCICE n°1 : enseignement obligatoire et de spécialité

1. La droite d'équation  $y = 4$  est asymptote à la courbe  $(C)$  au voisinage de  $+\infty$  donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$$

2. La fonction  $f$  est dérivable en  $0$ .  $A$  admet pour coordonnées  $(0;1)$  et  $f$  admet un minimum en  $0$  donc :

$$f'(0) = 0.$$

3. La tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point  $A$  admet pour équation réduite :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0).$$

Or  $f'(0) = 0$  et  $f(0) = 1$  donc une équation de la tangente  $(T)$  est :

$$y = 1.$$

4. La droite d'équation  $y = x$  est sécante à la courbe  $(C)$  en un unique point dont l'abscisse appartient à :

$$]1; 2[.$$

5. Soit la fonction  $g$  définie par :  $g = \ln \circ f$ .

Nous savons que  $g(0) = \ln[f(0)] = \ln 1$  c'est à dire :

$$g(0) = 0.$$

6. On a :

- $]-3; 0[ \xrightarrow{f \text{ décroissante}} ]1; +\infty[ \xrightarrow{\ln \text{ croissante}} ]0; +\infty[$  donc par composée  $g$  est décroissante sur  $]-3; 0[$ .
- $[0; +\infty[ \xrightarrow{f \text{ croissante}} ]1; 4[ \xrightarrow{\ln \text{ croissante}} ]0; 2 \ln 2[$  donc par composée  $g$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ .

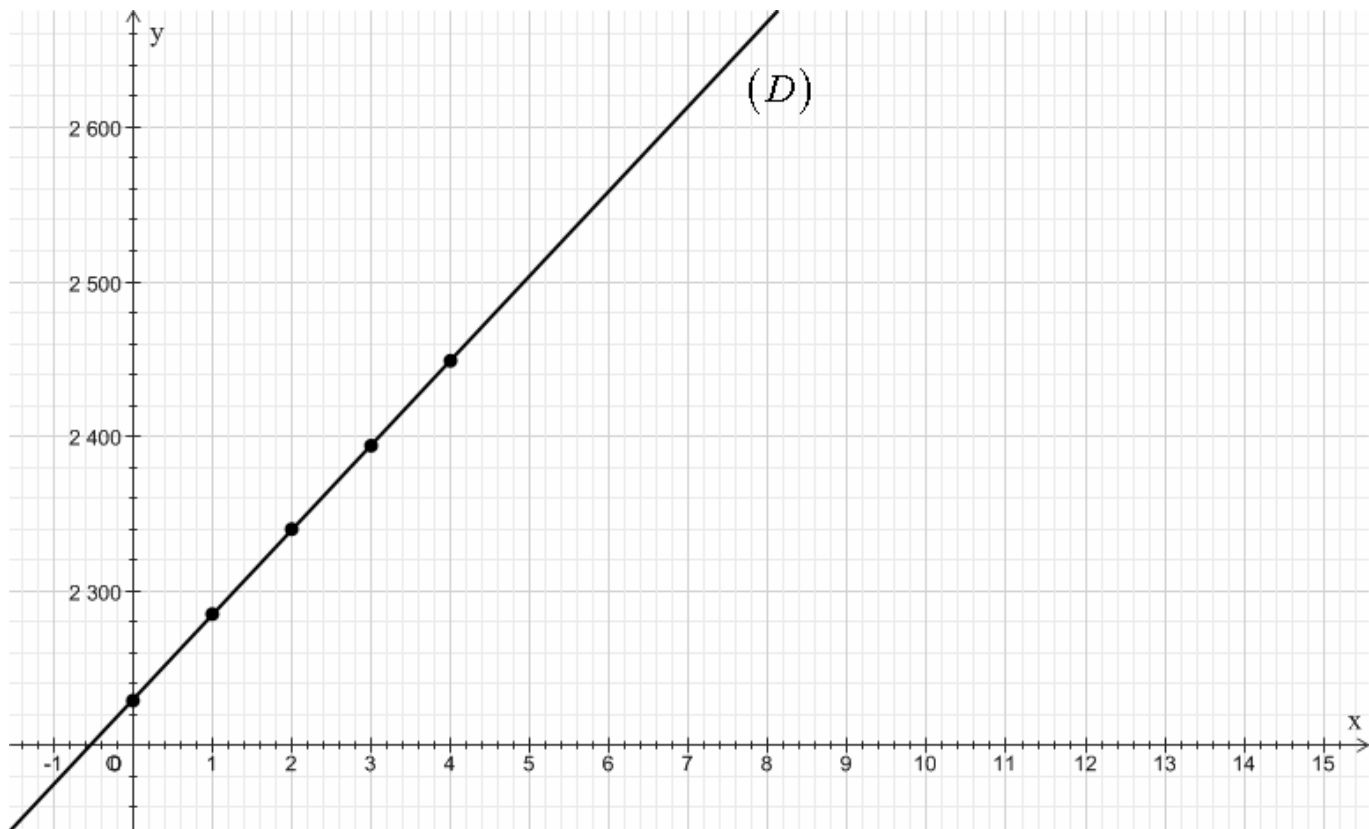
Conclusion :

$$g \text{ admet les mêmes variations que la fonction } f.$$

---

## EXERCICE n°2 : enseignement obligatoire uniquement

1. Le taux d'augmentation du montant du rachat d'un trimestre entre un salarié de 54 ans et un salarié de 58 ans es égal à :  $\frac{2449 - 2229}{2229} = 0,10$  soit un taux de 10 %.
2. Représentation graphique :



3. Une équation de la droite d'ajustement affine de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés est :  

$$y = 54,9x + 2229,6.$$

4. Le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié âgé de 60 ans est estimé par :  
 $54,9 \times 6 + 2229,6$  soit 2 559 €.

5. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Notons  $u_n$  le montant du rachat à partir pour un salarié âgé de  $60 + n$  ans.  
 Nous avons :

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{3}{100}\right)u_n = 0,97u_n.$$

$(u_n)$  est donc une suite géométrique de raison 0,97 et de premier terme  $u_0 = 2555$ .

On en déduit que :

$$u_n = u_0 \times q^n = 2555 \times 0,97^n.$$

Le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié ayant 65 ans est égal à :

$$u_5 = 2555 \times 0,97^5 \text{ soit } 2\,194,07 \text{ €.}$$

## **EXERCICE n°2 : enseignement de spécialité uniquement**

### **Partie A**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $u_n$  le nombre d'habitants au premier janvier de l'année  $2005 + n$ .

Nous avons  $u_0 = 100\,000$ .

$$u_1 = u_0 + \frac{5}{100}u_0 + 4000 = 1,05u_0 + 4000 = 109\,000.$$

La population comptera 109 000 habitants au premier janvier 2006.

De la même façon, on a :

$$u_2 = u_1 + \frac{5}{100}u_1 + 4000 = 1,05u_1 + 4000 = 118\,450.$$

La population comptera 118 450 habitants au premier janvier 2007.

2. On a :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{5}{100}u_n + 4000 = 1,05u_n + 4000.$$

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $v_n = u_n + 80\,000$ .

a. On a :

$$v_0 = u_0 + 80\,000 = 180\,000.$$

b. On a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 80\,000 = 1,05u_n + 4000 + 80\,000 = 1,05(v_n - 80\,000) + 84\,000 = 1,05v_n + 80\,000.$$

Donc  $(v_n)$  est une suite géométrique de premier terme  $v_0 = 180\,000$  et de raison 1,05.

c. On a :

$$v_n = v_0 \times 1,05^n = 180\,000 \times 1,05^n \text{ et } u_n = v_n - 80\,000 \text{ donc } u_n = 180\,000 \times 1,05^n - 80\,000.$$

d. Nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,05^n = +\infty \text{ car } 1,05 > 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

### Partie B

1. On a :

$$u_{15} = 180\,000 \times 1,05^{15} - 80\,000 \approx 294\,207.$$

La population comptera 294 207 habitants au premier janvier 2020.

2. On résout l'inéquation  $u_n \geq 200\,000$ .

$$u_n \geq 200\,000 \Leftrightarrow 180\,000 \times 1,05^n - 80\,000 \geq 200\,000 \Leftrightarrow 1,05^n \geq \frac{280\,000}{180\,000} \Leftrightarrow 1,05^n \geq \frac{14}{9}$$

$$\ln(1,05^n) \geq \ln\left(\frac{14}{9}\right) \Leftrightarrow n \ln(1,05) \geq \ln\left(\frac{14}{9}\right) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{14}{9}\right)}{\ln(1,05)} \Leftrightarrow n \geq 10.$$

C'est à partir du premier janvier de l'année 2015 que la population dépassera les 200 000 habitants.

### **EXERCICE n°3 : enseignement obligatoire et de spécialité**

Soit la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x - 2 + 10e^{-0,5x}.$$

On note  $(C)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal d'unité 1 cm et  $(D)$  la droite d'équation  $y = x - 2$ .

1. Déterminons la limite de  $f$  en  $+\infty$  :

On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (-0,5x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-0,5x}) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

2. On pose  $\alpha = 2 \ln 5$ .

a. Montrons que  $f(\alpha) = \alpha$  :

On a :

$$f(\alpha) = 2 \ln 5 - 2 + 10e^{-\ln 5} = 2 \ln 5 - 2 + 10e^{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} = 2 \ln 5 - 2 + 10 \times \frac{1}{5} = 2 \ln 5 = \alpha.$$

b. Donnons une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de  $\alpha$  :

On a :

$$\alpha \approx 3,2$$

3. On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  et on note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur cet intervalle.

a. Calculons  $f'(x)$  :

On a :

$$f'(x) = 1 + 10 \times (-0,5) e^{-0,5x} = 1 - 5e^{-0,5x}.$$

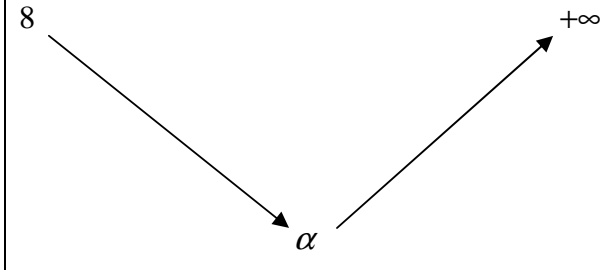
b. Etudions le signe de  $f'(x)$  sur  $[0; +\infty[$  et dressons le tableau complet des variations de la fonction  $f$  sur cet intervalle :

On a :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 5e^{-0,5x} > 0 \Leftrightarrow e^{-0,5x} < \frac{1}{5} \Leftrightarrow -0,5x < \ln\left(\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow -0,5x < -\ln 5$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0,5x > \ln 5 \Leftrightarrow x > \alpha.$$

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	8		$\alpha$	$+\infty$



4. Justifions que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-2)] = 0$  et que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$ ,

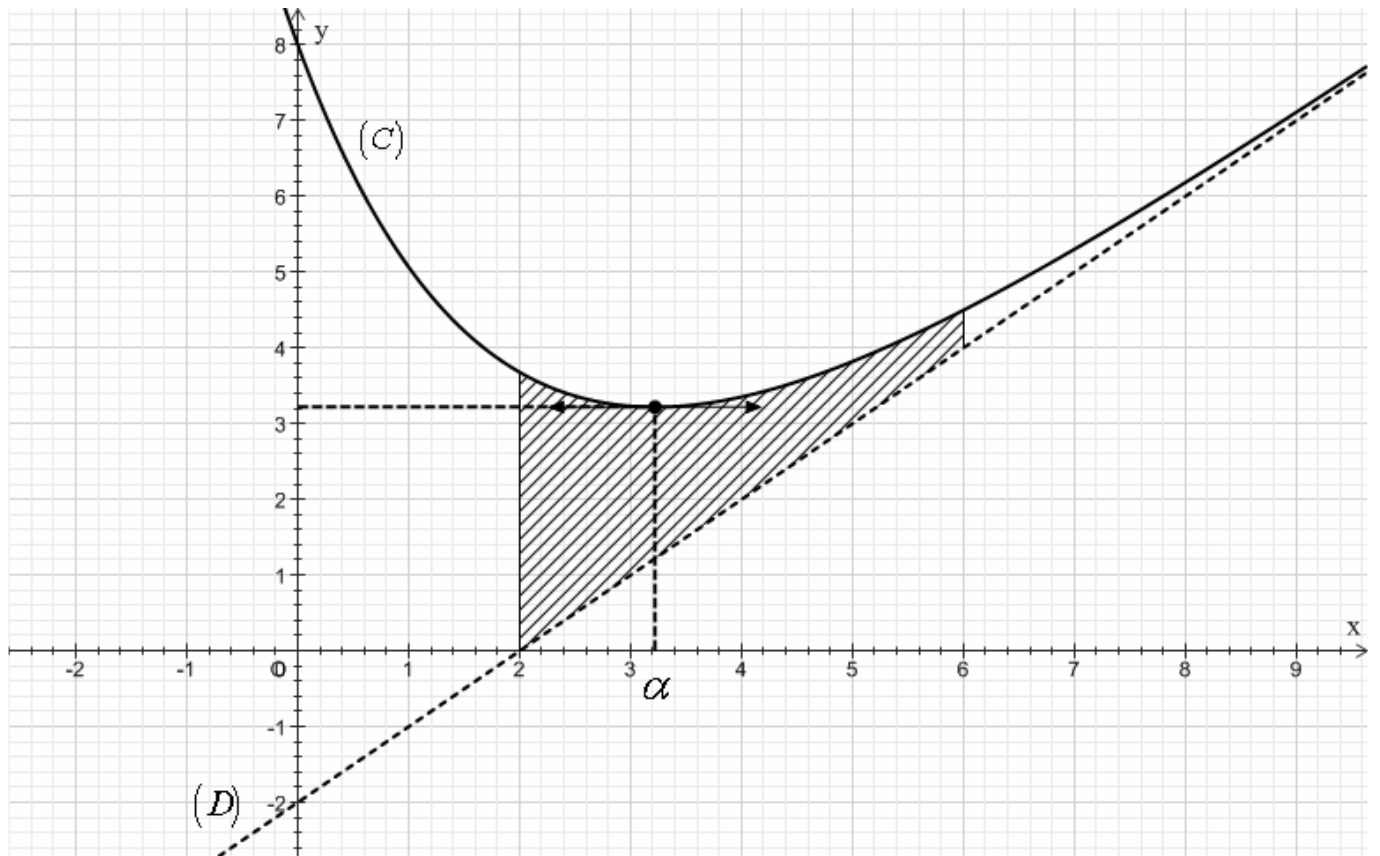
$$f(x) - (x-2) > 0.$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (10e^{-0,5x}) = 0 \text{ et } f(x) - (x-2) = 10e^{-0,5x} > 0.$$

La droite  $(D)$  d'équation  $y = x - 2$  est asymptote à la courbe  $(C)$  et  $(C)$  est au-dessus de  $(D)$  sur  $[0; +\infty[$ .

5. Représentation graphique :



6. On note  $A$  l'aire ( en unités d'aire) du domaine  $E$  délimité par la courbe  $(C)$ , la droite  $(D)$  et les droites d'équations respectives  $x = 2$  et  $x = 6$ .
- Voir graphique
  - Déterminons la valeur exacte de l'aire  $A$ , puis en donner la valeur arrondie au centième :  
On a :

$$A = \int_2^6 [f(x) - (x-2)] dx = \int_2^6 10e^{-0,5x} dx = 10 \left[ -\frac{1}{0,5} e^{-0,5x} \right]_2^6$$

$$A = 20 \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{e^3} \right) = 6,36 \text{ u.a.}$$

#### **EXERCICE n°4 : enseignement obligatoire et de spécialité**

Tous les résultats de cet exercice seront donnés à  $10^{-4}$  près.

1. Déterminons les probabilités des événements  $F_2$  et  $F_3$  :

On a :

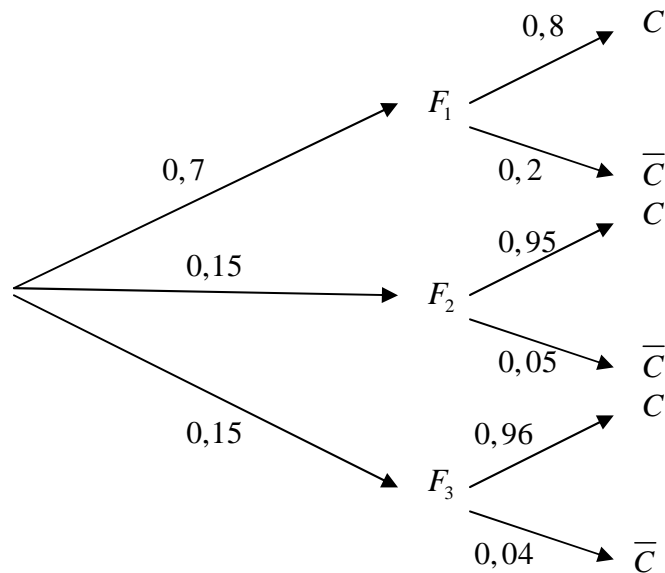
$$P(F_1) = 0,7 ; P(F_2) = P(F_3) \text{ et } P(F_1) + P(F_2) + P(F_3) = 1 \text{ donc :}$$

$$P(F_1) + P(F_2) + P(F_3) = 1$$

$$0,7 + 2P(F_2) = 1$$

$$P(F_2) = 0,15 = P(F_3).$$

2. Complétons l'arbre suivant :



3. Justifions que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre et provienne du troisième producteur est 0,1440 :

On a :

$$P(F_3 \cap C) = P(F_3) \times P_{F_3}(C) = 0,15 \times 0,96 = 0,144.$$

4. Montrons que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre est 0,8465 :

On a :

$$P(C) = P(F_1 \cap C) + P(F_2 \cap C) + P(F_3 \cap C)$$

$$P(C) = P(F_1) \times P_{F_1}(C) + P(F_2) \times P_{F_2}(C) + P(F_3 \cap C)$$

$$P(C) = 0,7 \times 0,8 + 0,15 \times 0,95 + 0,144$$

$$P(C) = 0,8465.$$

5. La pomme mesurée est hors calibre. Le contrôleur affirme : « Cette pomme provient très probablement du premier producteur ».

On a :

$$P_{\bar{C}}(F_1) = \frac{P(F_1 \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(F_1) \times P_{F_1}(\bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{0,7 \times 0,2}{1 - 0,8465} = 0,91.$$