CORRECTION DU SUJET : CENTRES ETRANGERS JUIN 2005

<u>EXERCICE n°1</u> : *enseignement obligatoire et de spécialité*

1. La fonction $x \mapsto ex + \ln 2$ admet pour fonction dérivée sur $]0;+\infty[$ la fonction $x \mapsto e$.
2. La fonction f définie pour $x \in]0;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(3x) + \ln(3)$ admet pour fonction dérivée $f'(x) = \dfrac{3}{3x} = \dfrac{1}{x}$.
3. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^{-2x+3} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(-2e^{-2x+3}\right)$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{2}e^{-2x+3}$.
4. Soit (E) l'équation $e^{2x} + e^{x} - 6 = 0$.
   On pose $X = e^{x}$ et l'équation devient $X^2 + X - 6 = 0$ d'où $X = -3$ ou $X = 2$.
   Alors $e^{x} = -3$ ou $e^{x} = 2$ or $e^{x} > 0$ donc $e^{x} = 2$ c'est à dire $x = \ln 2$.
5. Soit (F) l'équation $(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$.
   On pose $X = \ln x$ et l'équation devient $X^2 + X - 6 = 0$ d'où $X = -3$ ou $X = 2$.
   Alors $\ln x = -3$ ou $\ln x = 2$ donc $x = e^{-3}$ et $x = e^{2}$.
6. $1{,}1^{x} = 2{,}2 \Leftrightarrow \ln\left(1{,}1^{x}\right) = \ln(2{,}2) \Leftrightarrow x\ln(1{,}1) = \ln(2{,}2) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(2{,}2)}{\ln(1{,}1)}$.

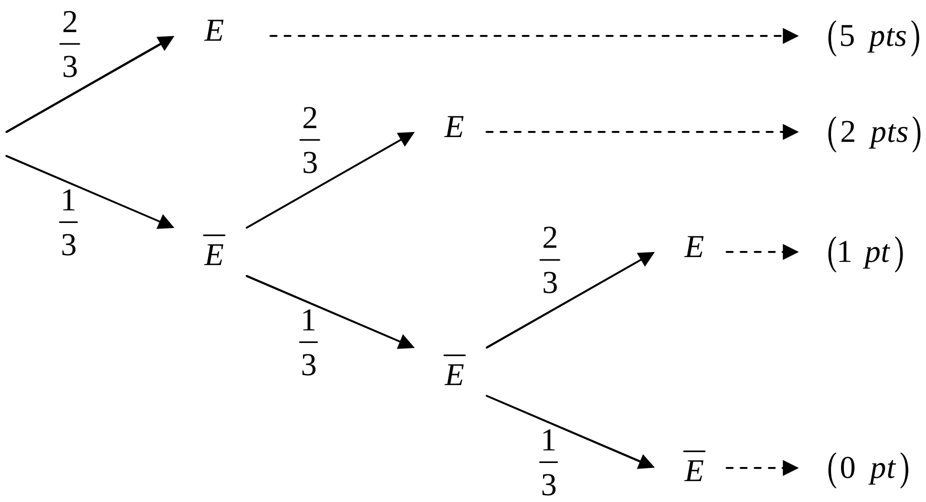
<u>EXERCICE n°2</u> : *enseignement obligatoire uniquement*

Partie A

1. La probabilité cherchée est :
$$P(M \cap E) = P(M) \times P_M(E) = \frac{3}{4}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$
2. La probabilité cherchée est :
$$P(E) = P(M \cap E) + P(C \cap E) = \frac{1}{2} + P(C)\times P_C(E) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$
3. La probabilité cherchée est :
$$P_{\overline{E}}(C) = \frac{P\left(C \cap \overline{E}\right)}{P\left(\overline{E}\right)} = \frac{P(C)\times P_C\left(\overline{E}\right)}{1 - P(E)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Partie B

1. Arbre de probabilité :



2. La loi de probabilité de points marqués par Pierre est résumée par le tableau suivant :

Points	0	1	2	5
Probabilité	$\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$

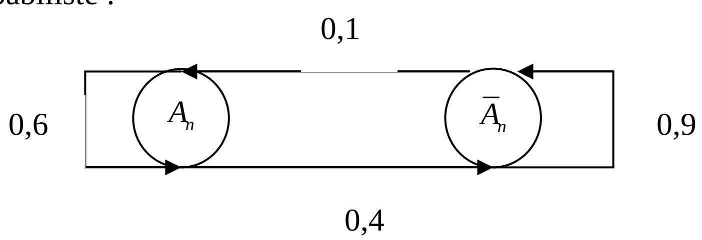
3. L'espérance mathématique du nombre de points marqués par Pierre est :

$$E=0\times\frac{1}{27}+1\times\frac{2}{27}+2\times\frac{2}{9}+5\times\frac{2}{3}=\frac{104}{27}\simeq 3{,}9\ .$$

Pierre peut espérer marquer 3,9 points en moyenne à ce jeu.

<u>EXERCICE n°2</u> : ***enseignement de spécialité uniquement***

1. Graphe probabiliste :



2. La matrice de transition du graphe est :

$$A=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}9\end{pmatrix}.$$

Si on pose $P_n=\begin{pmatrix}f_n & g_n\end{pmatrix}$ alors $P_{n+1}=\begin{pmatrix}f_{n+1} & g_{n+1}\end{pmatrix}$ et comme $P_{n+1}=P_n\times A$, on obtient :

$$\begin{pmatrix}f_{n+1} & g_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_n & g_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}9\end{pmatrix}.$$

3. Pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2 :
On a :

$P_n=P_0\times A^n$ alors $P_2=P_0\times A^2$ d'où :

$$\begin{pmatrix}f_2 & g_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}9\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}6\\ 0{,}15 & 0{,}85\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}275 & 0{,}725\end{pmatrix}$$ soit 27,5 %.

4. Etat stable :
On pose : $P=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ avec $x+y=1$ et $P=P\times A$.
On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x=0,6x+0,1y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ 0,4x-0,1y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ 4x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{5} \\ y=\dfrac{4}{5} \end{cases}.$$

Cela signifie qu'à terme, une personne sur cinq sera fumeuse.

5. On a :

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} f_{n+1} = 0,6f_n + 0,1g_n \\ g_{n+1} = 0,4f_n + 0,9g_n \end{cases}.$$

Or $g_n = 1 - f_n$, donc $f_{n+1} = 0,6f_n + 0,1g_n = 0,6f_n + 0,1(1-f_n) = 0,5f_n + 0,1$.

6. On pose : $u_n = f_n - 0,2$.
   a. $u_{n+1} = f_{n+1} - 0,2 = 0,5f_n + 0,1 - 0,2 = 0,5f_n - 0,1 = 0,5(u_n + 0,2) - 0,1 = 0,5u_n$.
   La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = f_0 - 0,2 = 0,3$ et de raison $0,5$.
   b. On a :
   $u_n = u_0 \times q^n = 0,3 \times 0,5^n$.
   c. On a :
   $f_n = u_n + 0,2 = 0,3 \times 0,5^n + 0,2$.
   d. On a :
   $-1 < 0,5 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(0,5^n) = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(f_n) = 0,2 = \dfrac{1}{5}$: valeur trouvée à la question 4.

<u>EXERCICE n°3</u> : *enseignement obligatoire et de spécialité*

1. Soit f la fonction définie pour $x \in [0;3]$ par : $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$.
   Nous avons $f_1(e-1) = 1$ et $f_2(e-1) = 1$ donc $f(e-1) = 0$.
   Or la représentation graphique donnée sur la figure 3 indique que la courbe passe par le point de coordonnées $(e-1;2)$ donc la courbe donnée sur la figure 3 ne peut pas convenir.
2. C_1 est située au-dessus de C_2 sur l'intervalle $[0;e-1]$ et au-dessous de C_2 sur $[e-1;3]$. Par conséquent :
   - pour tout $x \in [0;e-1[$, $f_1(x) - f_2(x) > 0$,
   - pour tout $x \in]e-1;3]$, $f_1(x) - f_2(x) < 0$,
   - $f_1(e-1) - f_2(e-1) = 0$.

   On en déduit le signe de $f(x)$ sur $[0;3]$:

x	0		$e-1$		3
$f(x)$		$+$	0	$-$	

f_2 est strictement croissante sur $[0;3]$ donc $-f_2$ est strictement décroissante sur $[0;3]$. Puisque f_1 est strictement décroissante sur $[0;3]$ et que f est la somme de deux fonctions décroissantes sur $[0;3]$, on en déduit que f est strictement décroissante sur $[0;3]$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur $[0;3]$ donc f est dérivable sur $[0;3]$. Il s'ensuit que le tableau de signes de la fonction f' sur $[0;3]$ est le suivant :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ 3
$f'(x)$	$-$

3. Soit F une primitive de f sur $[0;3]$.

   On a : $F'(x) = f(x)$ donc le tableau de signes de $f(x)$ établi précédemment permet d'affirmer que F est croissante sur $[0;e-1]$ et décroissante sur $[e-1;3]$.
4. D'après la question précédente, la courbe représentative de F est celle de la figure 4.
5. Nous avons :

$$I = \int_0^{e-1} f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_0^{e-1} = F(e-1) - F(0) = \frac{e^2-3}{2} - 0 = \frac{e^2-3}{2}.$$

6. Le domaine du plan hachuré est le domaine délimité par C_1, C_2, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = e-1$.

   On en déduit que son domaine, exprimé en unités d'aire, est :

$$\int_0^{e-1} \left[f_1(x) - f_2(x)\right]dx = \int_0^{e-1} f(x)\,dx = \frac{e^2-3}{2}\ u.a.$$

<u>EXERCICE n°4</u> : ***enseignement obligatoire et de spécialité***

Partie A

1. Une équation de la droite d'ajustement de Y en x est : $Y = 0{,}14x + 6{,}397$.

   L'année 2004 correspond au rang 6 et $0{,}14\times 6 + 6{,}397 = 7{,}237$.

   Nous avons $Y = \ln y$ donc $y = e^Y$.

   Le nombre d'adhérents prévus en 2004 est donc égal à $e^{7,237}$ soit 1 390 arrondi à l'unité.
2. Nous avons : $Y = 0{,}14x + 6{,}397$ et $Y = \ln y$ donc :

$$Y = 0{,}14x + 6{,}397 \Leftrightarrow \ln y = 0{,}14x + 6{,}397 \Leftrightarrow y = e^{0,14x+6,397} \Leftrightarrow y = e^{0,14x} \times e^{6,397}$$

$$y = \left(e^{0,14}\right)^x \times e^{6,397} \Leftrightarrow y = 1{,}15^x \times 600 \Leftrightarrow y = 600 \times 1{,}15^x.$$

   Le coefficient multiplicateur du nombre d'adhérents entre 1998 et 2004 est $\frac{1390}{600} \simeq 2{,}31$ arrondi à 10^{-2}.

   On a :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)^6 = 2{,}31 \Leftrightarrow \ln\left[\left(1+\frac{t}{100}\right)^6\right] = \ln 2{,}31 \Leftrightarrow 6\ln\left(1+\frac{t}{100}\right) = \ln 2{,}31 \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{t}{100}\right) = \frac{\ln 2{,}31}{6}$$

$$e^{\ln\left(1+\frac{t}{100}\right)} = e^{\frac{\ln 2,31}{6}} \Leftrightarrow 1+\frac{t}{100} = e^{\frac{\ln 2,31}{6}} \Leftrightarrow t = 100\left(e^{\frac{\ln 2,31}{6}} - 1\right) \simeq 15.$$

   Conclusion :

   Le nombre d'adhérents à augmenter de 15 % par an entre 1998 et 2004.

Partie B

1. Le club a compté 2 400 adhérents en 2004.

   Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3600}{1+0{,}5e^{-x}}$ sur $[0;+\infty[$.

Nous avons $\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}\right)=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+e^{-x}\right)=1$ donc $\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=3600$ soit $\lim_{n\to+\infty} f\left(n\right)=3600$.

2. Tableau de valeurs :

n	1	2	3	4	5
$f\left(n\right)$	3 041	3 372	3 513	3 567	3 588

Le nombre prévisionnel moyen d'adhérents entre 2005 et 2009 est :

$$M=\frac{3041+3372+3513+3567+3588}{5}=3416.$$

3. Soit F la fonction définie par $F\left(x\right)=3600\ln\left(e^{x}+0,5\right)$ sur $\left[0;+\infty\right[$.

   a. On a :

$$F'\left(x\right)=3600\times\frac{e^{x}}{e^{x}+0,5}=3600\times\frac{e^{x}}{e^{x}\left(1+\frac{0,5}{e^{x}}\right)}=3600\times\frac{1}{1+0,5e^{-x}}=f\left(x\right).$$

   b. La valeur moyenne de f sur $\left[0,5;5,5\right]$ est :

$$\mu=\frac{1}{5,5-0,5}\int_{0,5}^{5,5} f\left(x\right)dx=\frac{1}{5}\left[F\left(5,5\right)-F\left(0,5\right)\right]\simeq 3411.$$

   M et μ sont relativement proches.