CORRECTION Baccalauréat ES Asie juin 2004

<u>EXERCICE n°1</u> : Commun à tous les candidats (*4 pts*)

1. Population au 1ier janvier 2004 :

$$30\times\left(1+\frac{2}{100}\right)=30\times1,02=30,6 \text{ millions.}$$

Population au 1ier janvier 2010 :

$$30\times\left(1+\frac{2}{100}\right)^{7}=34,461 \text{ millions.}$$

2. Pourcentage d'augmentation entre la population au 1ier janvier 2003 et la population au 1ier janvier 2010 :

$$\frac{34,461}{30}=1,149 \text{ soit } 14,9\ \%.$$

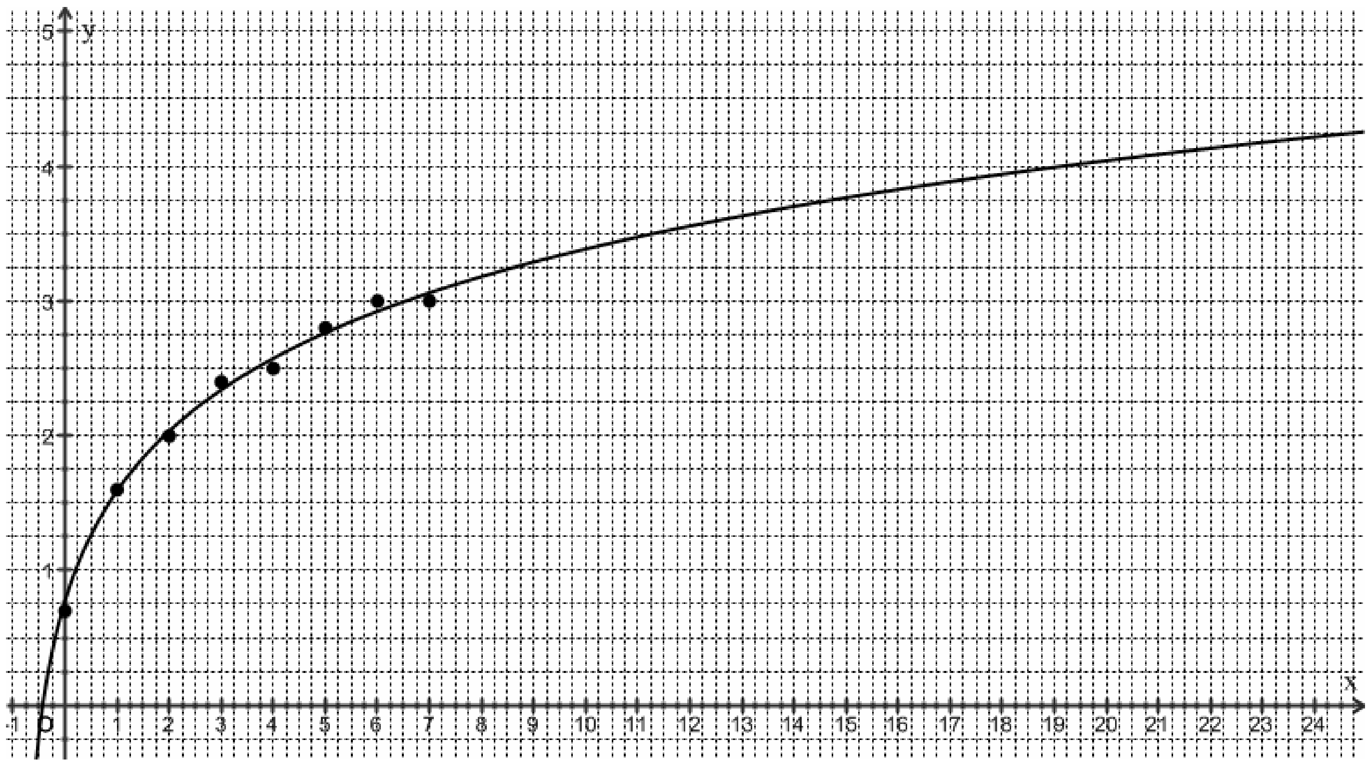
3. Résolution de l'équation :

$$1,02^{x}\geq1,2 \Leftrightarrow x\ln1,02\geq\ln1,2 \Leftrightarrow x\geq\frac{\ln1,2}{\ln1,02} \text{ soit } S=\left[\frac{\ln1,2}{\ln1,02};+\infty\right[.$$

4. On doit résoudre l'équation : $30\times\left(1+\frac{2}{100}\right)^{x}\geq36 \Leftrightarrow 1,2^{x}\geq1,2$. Or $\frac{\ln1,2}{\ln1,02}\simeq9,21$ donc à partir de l'année 2013, la population dépassera 36 millions d'habitants.

<u>EXERCICE n°2</u> : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (5 *pts*)

1. Représentation graphique :



2. La forme du nuage suggère un ajustement de la forme $y = \ln(ax+b)$.

   a. On pose $z_i = e^{y_i}$.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
y_i	0,7	1,6	2	2,4	2,5	2,8	3	3
z_i	2,014	4,953	7,389	11,023	12,182	16,445	20,086	20,086

   b. A l'aide de la calculatrice, on a : $z = 2,74x + 2,17$.

   c. On a :

$$z = 2,74x + 2,17 \Leftrightarrow e^y = 2,74x + 2,17 \Leftrightarrow y = \ln(2,74x + 2,17).$$

   d. Voir graphique précédent.

3. Chiffre d'affaires attendu en 2004 sera de :

   $\ln(2,74 \times 8 + 2,17) = 3,2$ millions d'euros.

<u>EXERCICE n°2</u> : Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité (*5 pts*)

PARTIE A

1. Avec 7 décilitres d'encre A et 8 décilitres d'encre B, on peut fabriquer : $2 \times 7(8+1) = 126$ paquets de cartes.

	Point M	Point P	Point R
Quantité d'encre A	8	5	4
Quantité d'encre B	9	11	4
Paquets de cartes	160	120	40

2. Si $x = 4$ alors $z = 8(y+1)$ donc la section est une droite.

PARTIE B

1. On a :

   $6x + 2y = 46$ soit $3x + y = 23$.

2. On obtient alors :

   $z = 2x(y+1) = 2x(23 - 3x + 1) = 2x(-3x + 24) = -6x^2 + 48x$.

3. Quantité d'encre A :

   Soit $f(x) = -6x^2 + 48x$.

   On a le tableau de variation suivant :

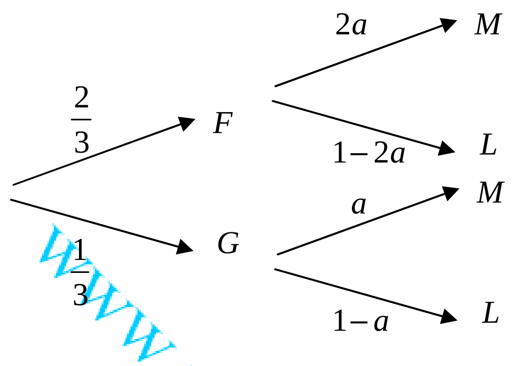
x	0		4		10
$f(x)$			96		
	0	↗		↘	-120

   Conclusion :

Il faut acheter 4 décilitres d’encre A pour avoir un nombre maximum de paquets soit 96 paquets.
On aura utilisée $23-3\times 4=11$ décilitres d’encre B.

<u>EXERCICE n°3</u> : Commun à tous les candidats (*4 pts*)

1. On a l’arbre suivant:



Montrons que : $a=\dfrac{9}{25}$:

$$P(F\cap M)+P(G\cap M)=\frac{60}{100}\Leftrightarrow P(F)\times P_F(M)+P(G)\times P_G(M)=\frac{3}{5}\Leftrightarrow \frac{2}{3}\times 2a+\frac{1}{3}\times a=\frac{3}{5}$$

$$P(F\cap M)+P(G\cap M)=\frac{60}{100}\Leftrightarrow 20a+5a=9\Leftrightarrow 25a=9\Leftrightarrow a=\frac{9}{25}.$$

On a :

$P(M)=\dfrac{3}{5}$; $P(G)=\dfrac{1}{3}$; $P(G)\times P(M)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{5}$ et $P(G\cap M)=\dfrac{3}{25}\neq\dfrac{1}{5}=P(G)\times P(M)$ alors les événements M et G ne sont pas indépendants.

2. On utilise l’événement contraire alors : $p=1-\left(\dfrac{40}{100}\right)^3=\dfrac{117}{125}$.

<u>EXERCICE n°4</u> : Commun à tous les candidats (7 *pts*)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(1-x^2)e^{-x}$.

1. Calculons les coordonnées des points A, B et C :

   $A(0;1)$; $B(-1;0)$ et $C(0;-1)$.

   Pour les points B et C, on résout l’équation $f(x)=0\Leftrightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow x=-1$ *ou* $x=1$.

2. Limites de f en $-\infty$ et $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{-x})=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(1-x^2)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty.$$

On a : $f(x)=\dfrac{1}{e^x}-\dfrac{x^2}{e^x}$ alors :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{e^x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{e^x}\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$ La droite d’équation $y=0$ est asymptote horizontale à la courbe (C) en $+\infty$.

3. Etude des variations :

   a. On a :

$f'(x) = -2x \times e^{-x} + (1-x^2) \times (-1) \times e^{-x} = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$.

b. On a :

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 1)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1+\sqrt{2} \simeq 2,41 \; ou \; x = 1-\sqrt{2} \simeq -0,41$.

$e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 2x - 1$.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion :

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \; si \; x = 1-\sqrt{2} \; ou \; x = 1+\sqrt{2} \\ f'(x) > 0 \; si \; x \in \left]-\infty ; 1-\sqrt{2}\right[\cup \left]1+\sqrt{2} ; +\infty\right[. \\ f'(x) < 0 \; si \; x \in \left]1-\sqrt{2} ; 1+\sqrt{2}\right[\end{cases}$$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(1-\sqrt{2})$	$\searrow$	$f(1+\sqrt{2})$	$\nearrow$	0

$f(1-\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}-1} \simeq 1,25$.

$f(1+\sqrt{2}) = -2(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}-1} \simeq -0,43$.

Conclusion :

La fonction f est croissante sur $\left]-\infty ; 1-\sqrt{2}\right]$ et sur $\left[1+\sqrt{2} ; +\infty\right[$.

La fonction f est décroissante sur $\left[1-\sqrt{2} ; 1+\sqrt{2}\right]$.