CORRECTION Baccalauréat ES Antilles septembre 2003

<u>EXERCICE n°1</u> : Commun à tous les candidats (9 *points*)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = ax + bx\ln x - 1$.

PARTIE A

1. On a graphiquement $f(1) = 2$ donc $f(1) = a - 1 = 2 \Leftrightarrow a = 3$.
2. $f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = -6e^{-\frac{3}{2}} - 1$ alors $f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = 3e^{-\frac{3}{2}} + be^{-\frac{3}{2}}\ln\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) - 1 = -6e^{-\frac{3}{2}} - 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}be^{-\frac{3}{2}} = -9e^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow b = 6$.

PARTIE B

Dans la suite du problème la fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 3x + 6x\ln x - 1$.

1. Déterminons les limites de la fonction f en 0 et $+\infty$:
   - Limite en 0 :

     $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}(3x-1) = -1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1.$$

   - Limite en $+\infty$:

     $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty}(3x) = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x) = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

2. On a :

   $$f'(x) = 3 + 6\left(1\times\ln x + x\times\frac{1}{x}\right) = 9 + 6\ln x.$$

   Etude du signe de la dérivée :

   $$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 9 + 6\ln x > 0 \Leftrightarrow x > e^{-\frac{3}{2}}.$$

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Conclusion :

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \ si \ x = e^{-\frac{3}{2}} \\ f'(x) > 0 \ si \ x \in \left]e^{-\frac{3}{2}};+\infty\right[\\ f'(x) < 0 \ si \ x \in \left]0;e^{-\frac{3}{2}}\right[\end{cases}.$$

Tableau de variation de la fonction f :

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| -1	$\searrow$	$f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Conclusion :

La fonction f est croissante sur $\left]e^{-\frac{3}{2}};+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]0;e^{-\frac{3}{2}}\right[$.

3. Equation de la tangente (D) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 :
   On a :
   $y = f'(1)(x-1)+f(1)$ avec $f'(1)=9$ et $f(1)=2$ d'où : $y=9(x-1)+2=9x-7$.

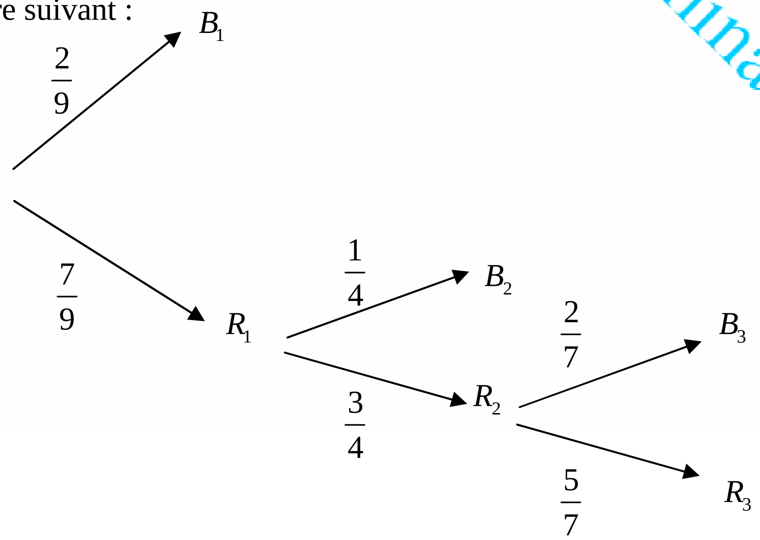
Représentation graphique :

PARTIE C

1. Un carreau représente $1\times 0{,}1 = 0{,}1$ *u.a.*
   On a :
   $$7 \leq \int_1^2 f(x)\,dx \leq 9.$$
2. Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 3x^2 \ln x$.
   a. On a :
   $$g'(x) = 3\left(2x\ln x + x^2 \times \frac{1}{x}\right) = 3(2x\ln x + x) = 3x + 6x\ln x$$
   b. $f(x) = 3x + 6x\ln x - 1 = g'(x) - 1$ alors une primitive F de la fonction f sur $]0;+\infty[$ est :
   $$F(x) = g(x) - x = 3x^2 \ln x - x$$
   $$\int_1^2 f(x)\,dx = F(2) - F(1) = 12\ln 2 - 2 + 1 = 12\ln 2 - 1 \simeq 7{,}3.$$

<u>EXERCICE n°2</u> : Commun à tous les candidats (6 *points*)

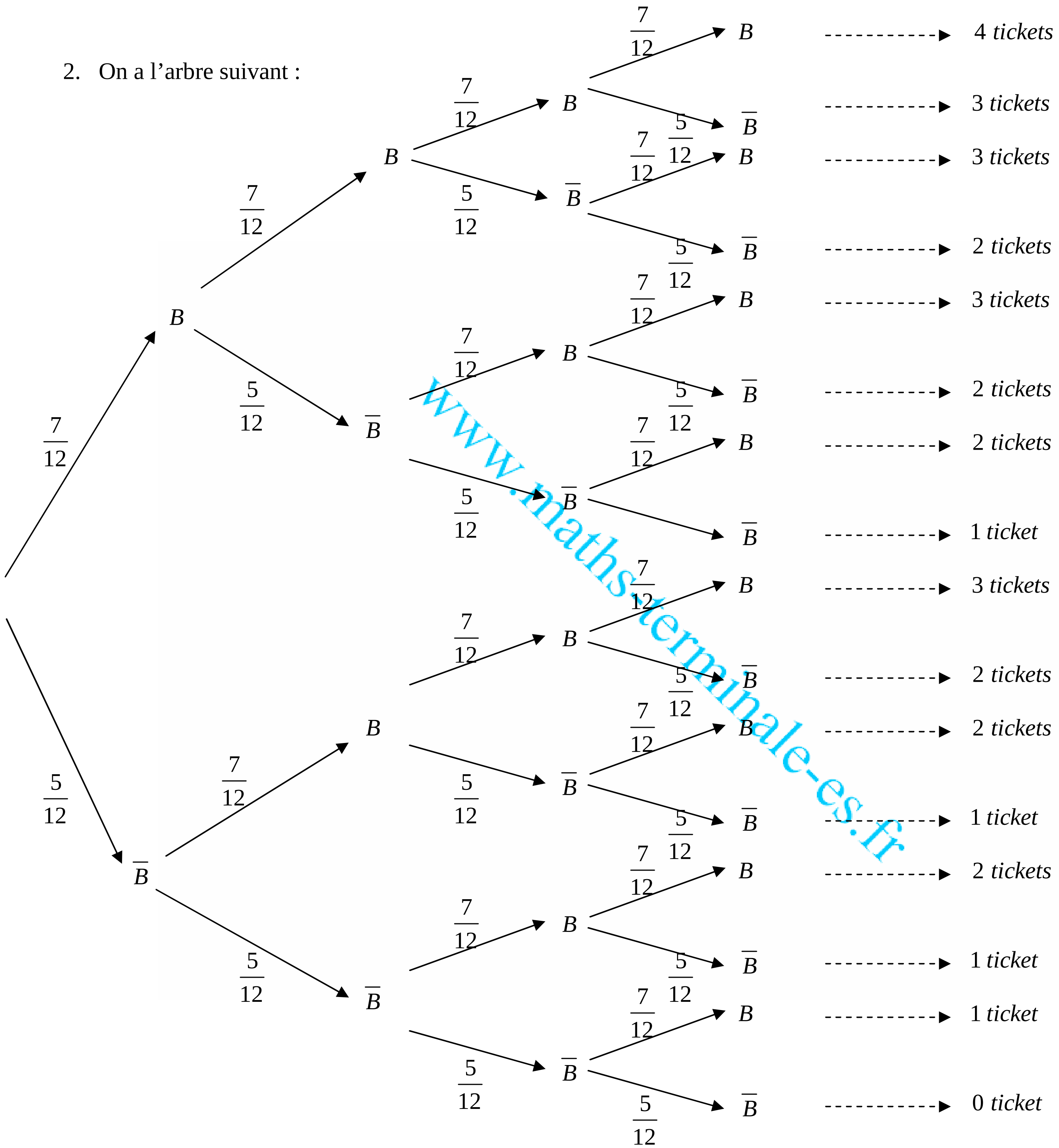
1. On a l'arbre suivant :



   a. Déterminons les probabilités des événements suivants :
   - A : « Julie gagne en un tirage exactement » :
     $$P(A) = P(B_1) = \frac{2}{9}.$$
   - B : « Julie gagne en deux tirages exactement » :
     $$P(B) = P(R_1 \cap B_2) = P(R_1)\times P_{R_1}(B_2) = \frac{7}{9}\times\frac{1}{4} = \frac{7}{36}.$$
   - C : « Julie gagne en trois tirages exactement » :
     $$P(C) = P(R_1 \cap R_2 \cap B_3) = P(R_1)\times P_{R_1}(R_2)\times P_{R_1\cap R_2}(R_3) = \frac{7}{9}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{7} = \frac{1}{6}.$$

   b. La probabilité de gagner à ce jeu est :
   $$P(G) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{2}{9} + \frac{7}{36} + \frac{1}{6} = \frac{7}{12}.$$

2. On a l'arbre suivant :



a. On a :

$$P(k=2) \overset{\text{Par indépendance}}{=} 6\times P\left(\overline{B}\right)^2\times P(B)^2 = 6\times\left(\frac{5}{12}\right)^2\times\left(\frac{7}{12}\right)^2 = 0,354\,.$$

3. Les valeurs prises par G sont : $\{-5;-4,25;1;5\}$

La loi de probabilité de G :

x_i	-5	$-4,25$	1	5
$P(X=x_i)$	0,030	0,523	0,331	0,116

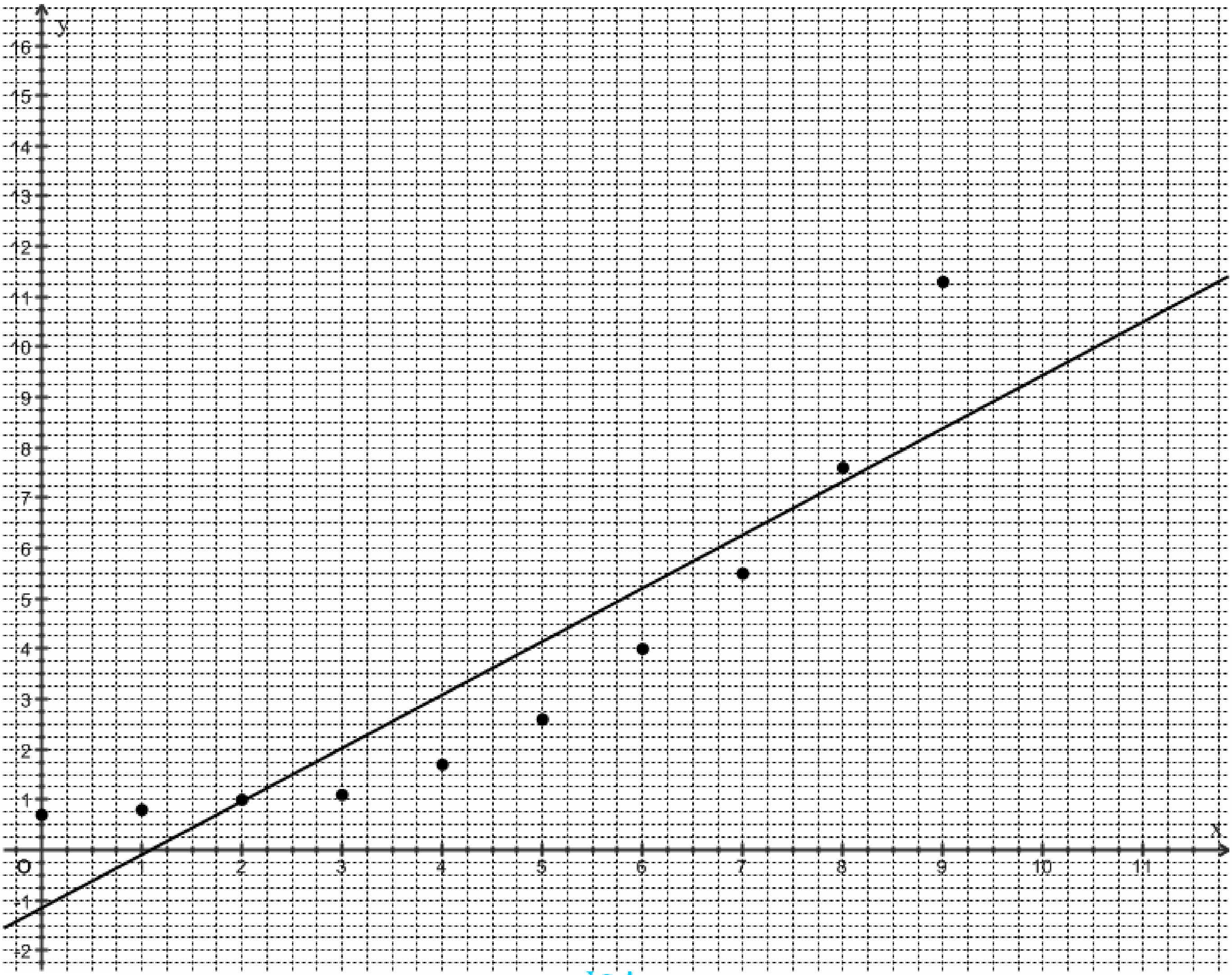
Espérance de G :

$E = -5\times 0,030 - 4,25\times 0,523 + 1\times 0,331 + 2\times 0,116 = -1,81$.

Cela signifie qu'en moyenne, Julie perdra 1,81 €.

<u>EXERCICE n°3</u> : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (*5 pts*)

1. Représentation du nuage de points :



2. Donnons une de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés :
   A l'aide de la calculatrice, on obtient :
   $y = 1,06x - 1,15$.
3. En 2007, la part des femmes élues maires sera de $1,06\times 10 - 1,15 = 9,45$ %.
4. On pose : $z = \ln y$
   a. On obtient le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z_i	-0,36	-0,22	0	0,1	0,53	0,96	1,39	1,7	2,03	2,42

   b. A l'aide de la calculatrice, on a :
   $z = 0,32x - 0,61$.

   c. On a alors :
   $z = 0,32x - 0,61 \Leftrightarrow \ln y = 0,32x - 0,61 \Leftrightarrow y = e^{0,32x-0,61} \Leftrightarrow y = e^{-0,61}\times e^{0,32x} = y = 0,54e^{0,32x}$.

d. En 2007, la part des femmes élues maires sera de $0,54e^{0,32\times 10}=13,25$ %.

<u>EXERCICE n°3</u> : Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité (*5 pts*)

1. Démontrons que la base ABCD est un carré :
   On a :
   $$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix} \text{ alors } \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \text{ et } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0.$$
   Conclusion :
   la base ABCD est un carré.
2. Equation du plan contenant les points *A*, *B*, *C* et *D* : $z=0$.
   Déterminons une équation du plan (ABS) sous la forme $ax+by+cz+d=0$:
   $$\begin{cases}A\in(ABS)\\B\in(ABS)\\S\in(ABS)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b+d=0\\2a+d=0\\5c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-\dfrac{d}{2}\\a=-\dfrac{d}{2}\\c=-\dfrac{d}{5}\end{cases} \text{ alors si } d=-10\ :\ 5x+5y+2z=10.$$
3. Il suffit de vérifier que les coordonnées des points *B*, *C* et *S* satisfont l'équation : $5x-5y+2z=10$.
   Les coordonnées de N ne vérifient pas l'équation du plan (BCS) donc il n'appartient pas ce plan.
4. Le plan (*R*) est parallèle au plan (BCS) donc ils ont la même vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-5\\2\end{pmatrix}$ d'où :

   $5x-5y+2z=d$. Or le point *M* appartient à (*R*) donc $5\times 0-5\times 1+2\times 0=d\Leftrightarrow d=-5$ soit $5x-5y+2z=-5$.
   Traces du plan (*R*) avec les plans (xOy), (yOz) et (xOz) :
   $$(R)\cap(Ox)=(-1;0;0)\ ;\ (R)\cap(Oy)=(0;1;0) \text{ et } (R)\cap(Oz)=\left(0;0;-\frac{5}{2}\right).$$