CORRECTION DU SUJET : ANTILLES JUIN 2005

EXERCICE n°1 : ***enseignement obligatoire et de spécialité***

REPONSES

Question n°1 **:**

Ce tableau donne les résultats d'un sondage dans une population de 60 personnes.

	Cadres	Employés	**Total**
Hommes	**12**	25	**37**
Femmes	8	15	**23**
Total	**20**	**40**	**60**

On interroge une personne au hasard, la probabilité que ce soit une femme sachant que c'est un cadre est :

$$\mathbf{B} : \frac{2}{5} = \frac{8}{20}$$

Question n°2 **:**

Une loi de probabilité d'espérance μ, de variance V et d'écart type σ est définie par le tableau ci-dessous :

x_i	1	2	3	4
p_i	0,2	**0,4**	0,1	0,3

$$\mathbf{A} : V = \frac{5}{4}$$

$$\mu = 1\times 0,2 + 2\times 0,4 + 3\times 0,1 + 4\times 0,3 = 2,5 = \frac{5}{2}$$

$$V = 1^2\times 0,2 + 2^2\times 0,4 + 3^2\times 0,1 + 4^2\times 0,3 - 2,5^2 = 1,25 = \frac{5}{4}$$

Question n°3 **:**

Soient C et D deux événements indépendants tels que $P(C) = \dfrac{1}{3}$ et $P(D) = \dfrac{1}{12}$. On a alors :

$$\mathbf{B} : P(C\cup D) = \frac{7}{18}$$

$$P(C\cup D) = P(C) + P(D) - P(C\cap D)$$

$$P(C\cup D) = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - P(C)\times P(D)$$

$$P(C\cup D) = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{12} = \frac{7}{18}$$

Question n°4 **:**

On lance une pièce de monnaie équilibrée quatre fois de suite.
La probabilité d'obtenir au moins une fois pile est :

$$\mathbf{B} : \frac{15}{16}$$

$$p = 1 - P(F\cap F\cap F\cap F)$$

$$p \overset{\text{par indépendance}}{=} 1 - P(F)^4 = \frac{15}{16}$$

Question n°5 **:**

$P(A) = 0,22$; $P_A(\overline{B}) = 0,3$; $P_{\overline{A}}(B) = 0,1$

$$\mathbf{A} : P(B) = 0,22$$

On a :

$$P(B) = P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B)$$

$$P(B) = P(A)\times P_A(B) + P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)$$

$$P(B) = 0,1\times 0,8 + 0,7\times 0,2 = 0,22.$$

<u>EXERCICE n°2</u> : ***enseignement obligatoire uniquement***

Soit la fonction f dont la tableau de variation incomplet est le suivant :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘	…. ‖ $+\infty$	↘	2	↗	….

On admet que f est définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ par :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}.$$

où a, b et c sont des réels.

1. Calculons $f'(x)$ en fonction de a, b et c :

   On a :

   $$f'(x)=a+c\times\frac{-1}{(x+1)^2}=a-\frac{c}{(x+1)^2}.$$

2. En nous aidant des informations contenues dans le tableau de variation, déterminons les valeurs de a, b et c :

   On a :

   $$\begin{cases}f(1)=2\\ f(-3)=-6\\ f'(1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+\dfrac{c}{2}=2\\ -3a+b-\dfrac{c}{2}=-6\\ a-\dfrac{c}{4}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+2b+c=4\\ -6a+2b-c=-12\\ 4a-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+2b+4a=4\\ -6a+2b-4a=-12\\ c=4a\end{cases}$$

   $$\begin{cases}3a+b=2\\ -5a+b=-6\\ c=4a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a+b=2\\ 8a=8\\ c=4a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1.\\ c=4\end{cases}$$

   D’où :

   $$f(x)=x-1+\frac{4}{x+1}.$$

3. Déterminons les limites manquantes dans le tableau de variation :

   On a :

   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x<-1}}(x-1)=-2\\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x<-1}}(x+1)=0^-\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x<-1}}\left(\dfrac{4}{x+1}\right)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x<-1}}f(x)=-\infty.$$

   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{x+1}\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

4. Montrons que la courbe représentative $\left(C_f\right)$ de la fonction f admet comme asymptote la droite (D) d'équation $y = x-1$ lorsque tend vers $-\infty$ ou $+\infty$:

On a :

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left[f(x)-(x-1)\right] = \lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{4}{x+1}\right) = 0$$

Etudions la position relative de $\left(C_f\right)$ et (D) :

On a :

$$f(x)-(x-1) = \frac{4}{x+1} \ :$$

- Sur $]-\infty;-1[$, la courbe $\left(C_f\right)$ est en dessous de la droite (D).
- Sur $]-1;+\infty[$, la courbe $\left(C_f\right)$ est au-dessus de la droite (D).

5. Déterminons la valeur exacte de $\int_1^2\left[f(x)-(x-1)\right]dx$ et interprétons le résultat en terme d'aire :

On a :

$$\int_1^2\left[f(x)-(x-1)\right]dx = \int_1^2 \frac{4}{x+1}dx = 4\left[\ln(x+1)\right]_1^2 = 4(\ln 3-\ln 2) = 4\ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Cette intégrale représente l'aire du domaine du plan, exprimé en unité d'aire, délimité par la courbe $\left(C_f\right)$, la droite (D) et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

<u>EXERCICE n°2</u> : ***enseignement de spécialité uniquement***

1. Soit $\left(P_n\right)$ la suite donnant la population de libellules au bout de n années. $n\in\mathbb{N}$.

On a :

$$P_{n+2}-P_{n+1} = \frac{1}{2}\left(P_{n+1}-P_n\right).$$

Alors :

$P_1-P_0 = 60\ 000-40\ 000 = 20\ 000$: accroissement pendant la première année.

$P_2-P_1 = \frac{1}{2}\left(P_1-P_0\right) = \frac{1}{2}\times 20\ 000 = 10\ 000$: accroissement pendant la deuxième année.

$P_3-P_2 = \frac{1}{2}\left(P_2-P_1\right) = \frac{1}{2}\times 10\ 000 = 5\ 000$: accroissement pendant la troisième année.

$P_2-P_1 = 10\ 000 \Leftrightarrow P_2 = 10\ 000+P_1 = 70\ 000$.

$P_3-P_2 = 5\ 000 \Leftrightarrow P_3 = 5\ 000+P_2 = 75\ 000$.

2. On pose :

$$U_n = P_{n+1}-P_n \text{ et } V_n = P_{n+1}-\frac{1}{2}P_n.$$

a. $U_{n+1} = P_{n+2}-P_{n+1} = \frac{1}{2}\left(P_{n+1}-P_n\right) = \frac{1}{2}U_n$.

Donc $\left(U_n\right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $U_0 = P_1-P_0 = 20\ 000$.

On en déduit que pour tout entier naturel n :

$$U_n = U_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{20\ 000}{2^n}.$$

b. On a :

$$V_{n+1} - V_n = P_{n+2} - \frac{1}{2}P_{n+1} - \left(P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n\right) = \left(P_{n+2} - P_{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(P_{n+1} - P_n\right)$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2}\left(P_{n+1} - P_n\right) - \frac{1}{2}\left(P_{n+1} - P_n\right) = 0$$

$$V_{n+1} = V_n.$$

Donc la suite (V_n) est constante.

Par suite :

$$V_n = V_0 = P_1 - \frac{1}{2}P_0 = 40\ 000.$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$U_n = P_{n+1} - P_n \text{ et } V_n = P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n.$$

Donc :

$$V_n - U_n = -P_{n+1} + P_n + P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n = \frac{1}{2}P_n \quad \text{soit} \quad P_n = 2\left(V_n - U_n\right).$$

On en déduit que :

$$P_n = 2\left(V_n - U_n\right) = 2\left(40\ 000 - \frac{20\ 000}{2^n}\right) = 40\ 000\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

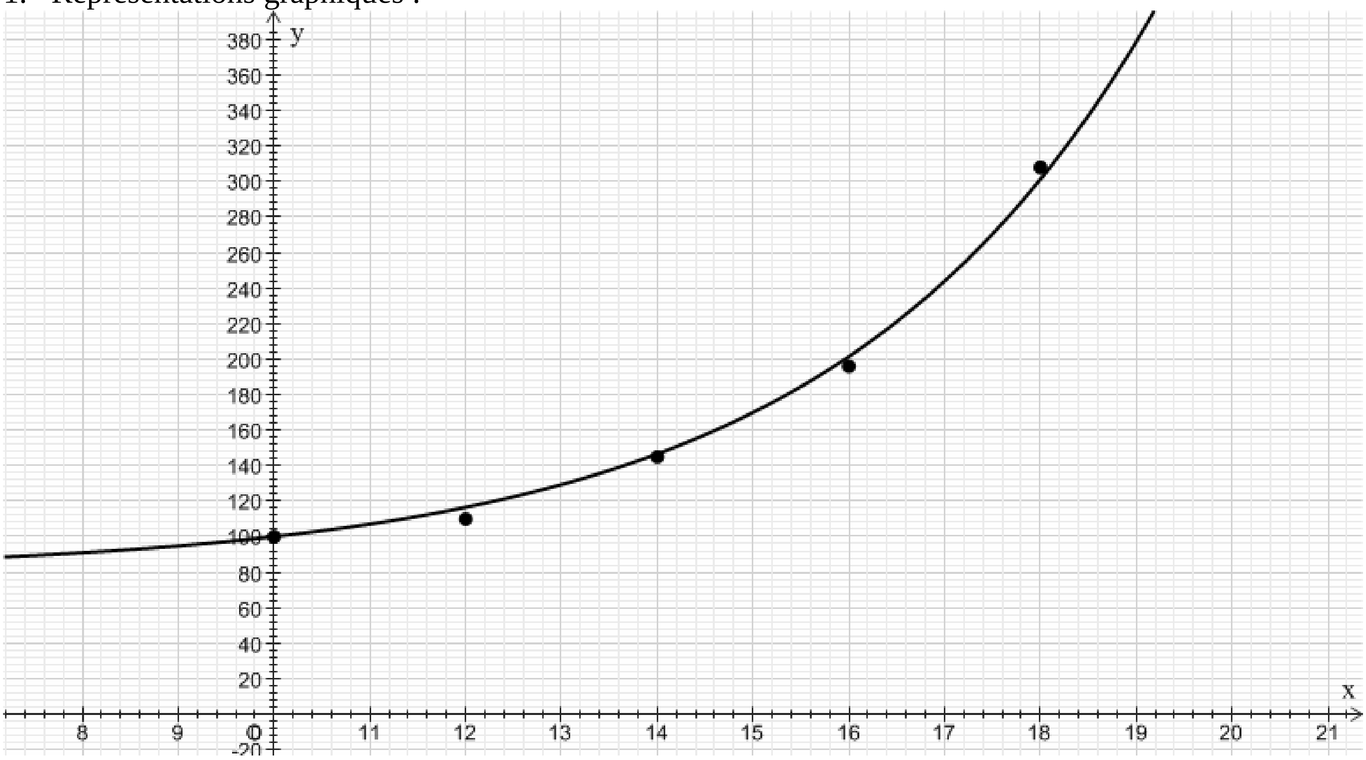
d. Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(P_n\right) = 80\ 000$.

La population de libellules finira par se stabiliser et comptera 80 000 libellules.

<u>EXERCICE n°3</u> : ***enseignement obligatoire et de spécialité***

Partie A

1. Représentations graphiques :



2. Une fonction f définie sur $[10;18]$ est dite acceptée si et seulement si, pour tout entier i, $1 \leq i \leq 5$, on a :

$$-10 \leq f(x_i) - C(x_i) \leq 10.$$

   a. f est définie pour tout x de $[10;18]$ par : $f(x) = e^{0,3x} + 80$.

   Tableau :

x_i	10	12	14	16	18
$f(x_i)$	100,09	116,6	146,69	201,51	301,41
$f(x_i) - C(x_i)$	0,09	6,6	1,69	5,51	$-6,59$

   Pour tout entier i, $1 \leq i \leq 5$, on a $-10 \leq f(x_i) - C(x_i) \leq 10$ donc f est dite « acceptée ».

   b. On a : $f'(x) = 0,3e^{0,3x} > 0$ donc f est strictement croissante sur $[10;18]$.
   Représentation graphique : voir question 1.

Partie B

1. On a $g(x) = (0,3x - 1)e^{0,3x} - 80$ alors :

$$g'(x) = 0,3 \times e^{0,3x} + (0,3x - 1) \times 0,3e^{0,3x} = 0,09xe^{0,3x} > 0 \text{ sur } [10;18].$$

   Conclusion :
   La fonction g est croissante sur $[10;18]$.

2. Tableau de variation de la fonction g :

x	10	18
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$g(10)$	$g(18)$

   $g(10) = 2e^3 - 80 < 0$ et $g(18) = 4,4e^{5,4} - 80 > 0$.

3. Sur l'intervalle $[10;18]$:
   - la fonction g est continue ;
   - la fonction g est strictement croissante ;
   - $g(10) = 2e^3 - 80 < 0$ et $g(18) = 4,4e^{5,4} - 80 > 0$;

   Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [10;18]$ et on a : $11,5 \leq \alpha \leq 11,6$.

Tableau de signes de la fonction g :

x	10		α		18
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie C

1. On pose : $C_m(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ pour tout $x \in [10;18]$.

   On a :

$$C'_m(x) = \frac{f'(x)\times x - f(x)\times 1}{x^2} = \frac{0,3e^{0,3x}\times x - \left(0,3e^{0,3x}+80\right)}{x^2}$$

$$C'_m(x) = \frac{(0,3x-1)e^{0,3x}-80}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

2. Tableau de variation de la fonction C_m :

x	10		α		18
$\dfrac{g(x)}{x^2}$		$-$	0	$+$	
$C_m(x)$	$C_m(10)$	$\searrow$	$C_m(\alpha)$	$\nearrow$	$C_m(18)$

$$C_m(10) = \frac{e^3+80}{10} \ ; \ C_m(18) = \frac{e^{5,4}+80}{18}.$$

3. Le coût moyen est minimum pour une production de 11,6 tonnes.
   Le coût moyen minimum est $C_m(\alpha)$ soit 9,694 centaines d’euros soit 969 euros à un euro près par défaut.