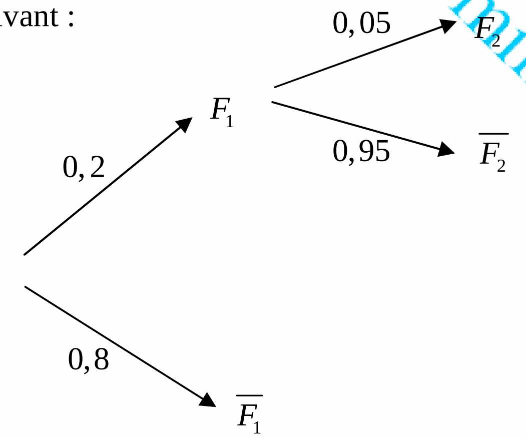
CORRECTION Baccalauréat ES Antilles juin 2004

EXERCICE n°1 : Commun à tous les candidats (*5 points*)

1. On note F la primitive de la fonction f.
   Sur $[1;2]$, $f(x)>0$ donc l'aire cherchée est donnée par :
   $$\int_1^2 f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_1^2=e+2-\frac{3}{2}=e+\frac{1}{2}\text{ u.a.}$$
2. Il faut choisir le premier tableau :
   - g et k ont des sens de variations contraires.
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{k(x)}=0$.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[h(x)-(-x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ donc la droite d'équation $y=-x+1$ est asymptote oblique à la courbe (C).
4. On a :
   $C_T(q)=q^3-5q^2+2\ln q+20q+c$ or $C_T(1)=10$ donc $c=-6$ et
   $C_T(q)=q^3-5q^2+2\ln q+20q-6$.

EXERCICE n°2 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (*5 points*)

1. On obtient l'arbre suivant :



2. La probabilité qu'il y ait exactement un faux départ est donnée par :
   $p=P\left(F_1\cap\overline{F_2}\right)\overset{\text{Par indépendance}}{=}P(F_1)\times P\left(\overline{F_2}\right)=0{,}19$.
3. On a le tableau suivant :

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,8	0,19	0,01

   $P(X=0)=P\left(\overline{F_1}\right)=0{,}8$.

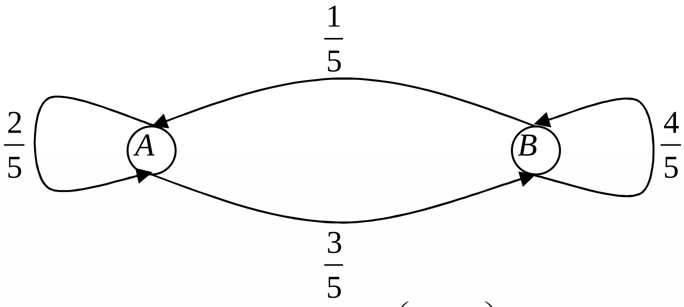
   $P(X=1)=P\left(F_1\cap\overline{F_2}\right)=0{,}19$.

   $P(X=2)=P(F_1\cap F_2)=0{,}2\times0{,}05=0{,}01$.

   On en déduit que la probabilité d'avoir au moins un faux départ est $0{,}19+0{,}01=0{,}2$ soit 20 %.
4. On peut s'aider d'un arbre et la probabilité cherchée est : $4\times0{,}8^3\times0{,}2=0{,}4096$.

EXERCICE n°2 : Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité (*5 points*)

1. Graphe représentant la situation :



La matrice représentant la situation est : $M=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$.

2. Soit $P_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$.
   a. On a $b_1=1$ donc $a_1=0$.
   b. On a $P_n=P_1\times M^{n-1}$ donc :

$$P_3=P_1\times M^2=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{7}{25} & \frac{18}{25}\\ \frac{6}{25} & \frac{19}{25}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{6}{25} & \frac{19}{25}\end{pmatrix}$$

   Alors la probabilité qu'elle face un score strictement inférieur à 25 secondes est : $\frac{6}{25}$.

3. Soit $P=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ l'état stable alors $P=P\times M$ d'où le système suivant :

$$P=P\times M\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y=x\\ \frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=5x\\ 3x+4y=5y\end{cases}\Leftrightarrow 3x-y=0.$$

   Or $x+y=1$ donc : $\begin{cases}x+y=1\\ 3x-y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\ y=\frac{3}{4}\end{cases}$.

4. Julien a une chance sur quatre de faire un score inférieur à 25 secondes car $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)=\frac{1}{4}$.

EXERCICE n°3 : Commun à tous les candidats (*6 points*)

PARTIE A :

Soit la fonction f définie sur $I=[0;5]$ par : $f(x)=9x-15-e^{2-0,2x}$.

1. Etude des variations de la fonction f :
   On a : $f'(x)=9-(-0,2)e^{2-0,2x}=9+0,2e^{2-0,2x}>0$ donc la fonction f est strictement croissante .

x	0		5
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-15-e^2$	$\nearrow$	$30-e$

2. Sur l'intervalle $I=[0;5]$:
   - La fonction f est continue ;
   - La fonction f est strictement croissante ;
   - $f(0)=-15-e^2<0$ et $f(5)=30-e>0$

   Donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $I=[0;5]$.

   A l'aide de la calculatrice, on obtient :

   $0<\alpha<5$

   $2<\alpha<3$

   $2{,}1<\alpha<2{,}2$

   $2{,}19<\alpha<2{,}20.$

3. On a :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{5-0}\int_0^5\left(9x-15-e^{2-0{,}2x}\right)dx=\frac{1}{5}\left[\frac{9x^2}{2}-15x-\frac{1}{-0{,}2}e^{2-0{,}2x}\right]_0^5$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{5}\left[\frac{9x^2}{2}-15x+5e^{2-0{,}2x}\right]_0^5=\frac{1}{5}\left[\left(\frac{225}{2}-75+5e\right)-5e^2\right]=\frac{15}{2}+e-e^2.$$

PARTIE B :

Soit la fonction C définie par : $C(x)=9x+15+e^{2-0{,}2x}$.

1. On a : $x\in[0;5]$.
2. Un appareil est vendu 200 € donc 100 appareils 20 000€ soit 20 milliers € donc :

   $R(x)=20\times\frac{90}{100}x=18x$ et $B(x)=R(x)-C(x)=9x-15-e^{2-0{,}2x}=f(x)$.
3. De la partie A , on obtient que :
   a. L'usine doit fabriquer au moins 220 appareils pour faire un bénéfice.
   b. La valeur moyenne du bénéfice est $\frac{15}{2}+e-e^2=2{,}829$ milliers d'euro soit 2 829 euros.

<u>EXERCICE n°4</u> : Commun à tous les candidats (*4 points*)

1. Nous avons le tableau suivant :

x_i	1980	1985	1992	2000	2003
y_i (€)	25 916	36 588	48 784	60 980	69 000

2. A l'aide de la calculatrice, nous obtenons la droite de régression suivante : $y = 1798,23x - 3533826,15$.

   On peut espérer revendre la résidence $1798,23 \times 2005 - 3533826,15 = 71625$ €.

3. Le prix de revente est donné par :

$$170000\left(1+\frac{t}{100}\right)^5 = 240000 \Leftrightarrow 17\left(1+\frac{t}{100}\right)^5 = 24 \Leftrightarrow \left(1+\frac{t}{100}\right)^5 = \frac{24}{17} \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{t}{100}\right)^5 = \ln\frac{24}{17}$$

$$170000\left(1+\frac{t}{100}\right)^5 = 240000 \Leftrightarrow 5\ln\left(1+\frac{t}{100}\right) = \ln\frac{24}{17} \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{t}{100}\right) = \frac{1}{5}\ln\frac{24}{17} \Leftrightarrow e^{\ln\left(1+\frac{t}{100}\right)} = e^{\frac{1}{5}\ln\frac{24}{17}}$$

$$170000\left(1+\frac{t}{100}\right)^5 = 240000 \Leftrightarrow 1+\frac{t}{100} = e^{\frac{1}{5}\ln\frac{24}{17}} \Leftrightarrow t = 100\left(e^{\frac{1}{5}\ln\frac{24}{17}} - 1\right).$$

4. Le prix de revente en 2005 sera :

   $36588\left(1+\frac{7,14}{100}\right)^{20} = 145335$ € soit presque le double de l'estimation faite dans la question 2.