

CORRECTION Baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 2003

EXERCICE n°1 : Commun à tous les candidats (5 points)

PARTIE A :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$

2. Résolution :

a. de l'équation $f(x) = 1$:

Les solutions de cette équation sont les abscisses des points de la courbe (C) dont l'ordonnée est égale à 1 : $S = \{-1\}$.

b. de l'inéquation $f(x) > 1$:

Les solutions de cette inéquation sont les abscisses des points de la courbe (C) dont l'ordonnée est strictement supérieure à 1 : $S =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[.$

PARTIE B :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par : $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - 1}$.

1. On a :

a.
$$\frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{e^x + x}{e^x}}{\frac{e^x - 1}{e^x}} = \frac{e^x + x}{e^x} \times \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{e^x + x}{e^x - 1} = f(x).$$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \right) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} \right) = 0$ alors :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{e^x} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

2. Etude du signe de $(e^x - 1)$:

On a :

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \text{ d'où le tableau de signes suivant :}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(e^x - 1)$	-	0	+

Conclusion :

$$\begin{cases} e^x - 1 = 0 & \text{si } x = 0 \\ e^x - 1 > 0 & \text{si } x \in]0; +\infty[\\ e^x - 1 < 0 & \text{si } x \in]-\infty; 0[\end{cases}$$

Résolution de l'inéquation $\frac{e^x + x}{e^x - 1} > 1$:

Cette inéquation est définie si $e^x - 1 \neq 0$ donc si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\frac{e^x + x}{e^x - 1} > 1 \Leftrightarrow \frac{e^x + x}{e^x - 1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x + x - (e^x - 1)}{e^x - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x + 1}{e^x - 1} > 0.$$

D'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$(e^x - 1)$	$-$		0	$+$
$\frac{x+1}{e^x - 1}$	$+$	0	$-$	$+$

Conclusion :

$$\frac{e^x + x}{e^x - 1} > 1 \text{ si } x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[.$$

3. On a :

$$f(x) + x = \frac{e^x + x}{e^x - 1} + x = \frac{e^x + x + x(e^x - 1)}{e^x - 1} = \frac{e^x + xe^x}{e^x - 1} \text{ or } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 0$$

Donc :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + xe^x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = 0.$$

Conclusion :

La droite d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$.

4. On a : $f(x) + x = \frac{e^x + xe^x}{e^x - 1} = \frac{e^x(x+1)}{e^x - 1}$ or $e^x > 0$ sur \mathbb{R} alors $f(x) + x$ est du signe de $\frac{x+1}{e^x - 1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

A la question 2., on étudier le signe de $\frac{x+1}{e^x - 1}$ donc :

Si $x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$, $f(x) + x > 0$ donc la courbe (C) est au-dessus de l'asymptote $y = -x$.

Si $x \in]-1; 0[$, $f(x) + x < 0$ donc la courbe (C) est en-dessous de l'asymptote $y = -x$.

Si $x = -1$, $f(x) + x = 0$ donc la courbe (C) et l'asymptote $y = -x$ se coupent au point $A(-1; 1)$.

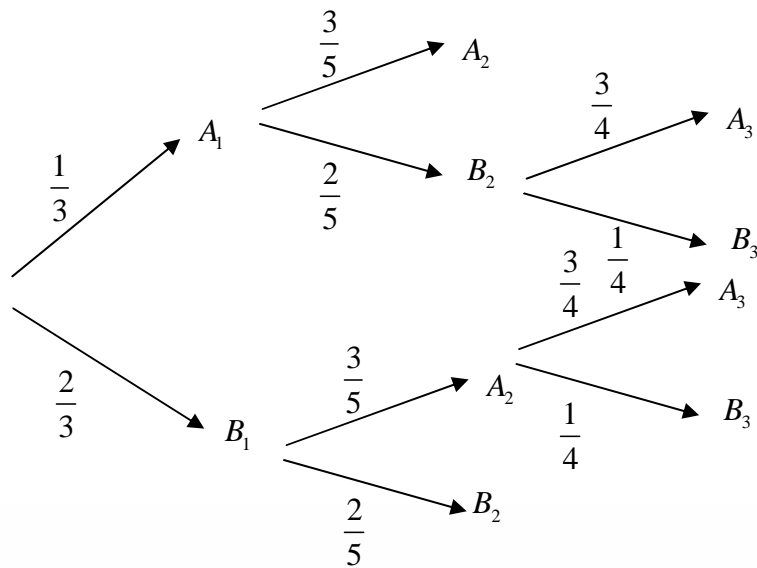
EXERCICE n°2 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

1. La probabilité qu'Alain remporte ce match en trois manches est donnée par : (voir arbre ci-dessous)

$$p_1 = P(A_1 \cap B_2 \cap A_3) + P(B_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P_{A_1}(B_2 \cap A_3) + P(B_1) \times P_{B_1}(A_2 \cap A_3)$$

$$p_1 = P(A_1) \times P_{A_1}(B_2) \times P_{A_1 \cap B_2}(A_3) + P(B_1) \times P_{B_1}(A_2) \times P_{B_1 \cap A_2}(A_3)$$

$$p_1 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

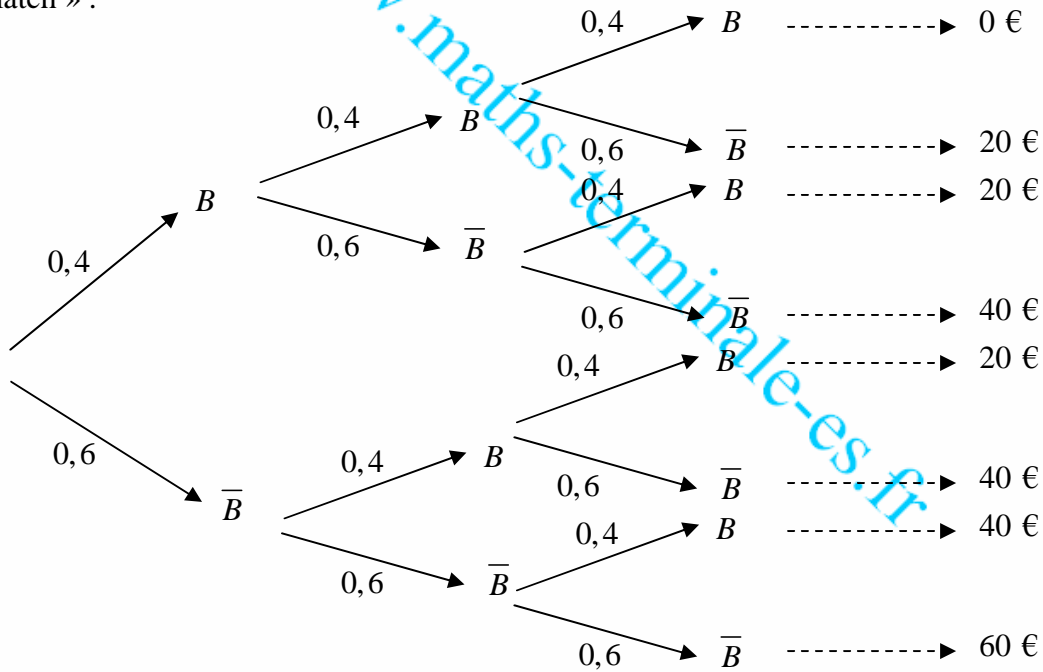


2. La probabilité qu'Alain remporte cette rencontre est donnée par : (voir arbre ci-dessus)

$$p_2 = p_1 + P(A_1 \cap A_2) = p_1 + P(A_1) \times P_{A_1}(A_2)$$

$$p_2 = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

3. On peut traduire la situation avec l'arbre ci-dessous avec B l'événement « Benjamin gagne le match » :



a. Les dépenses de Benjamin sont : 0, 20, 40 ou 60 €.

b. La probabilité que Benjamin dépense 40 € est donnée par :

$$p = P(B \cap \bar{B} \cap \bar{B}) + P(\bar{B} \cap B \cap \bar{B}) + P(\bar{B} \cap \bar{B} \cap B) \stackrel{\text{Par indépendance}}{=} 3 \times P(B) \times P(\bar{B})^2$$

$$p = 3 \times 0,4 \times 0,6^2 = 0,432.$$

c. La loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	20	40	60
$P(X = x_i)$	0,064	0,288	0,432	0,216

$$P(X = 0) = P(B)^3 = 0,4^3 = 0,064.$$

$$P(X = 20) = 3 \times P(B)^2 \times P(\bar{B}) = 3 \times 0,4^2 \times 0,6 = 0,288.$$

$$P(X = 40) = 0,432.$$

$$P(X = 60) = P(\overline{B})^3 = 0,6^3 = 0,216.$$

d. L'espérance de dépense est :

$$E(X) = 0,064 \times 0 + 0,288 \times 20 + 0,432 \times 40 + 0,216 \times 60 = 36 \text{ €}.$$

EXERCICE n°2 : Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

1. Le capital disponible le 1^{ier} janvier 2004 correspond à C_1 et on a :

$$C_1 = \left(1 + \frac{3,5}{100}\right) C_0 + 700 = 1,035 C_0 + 700 = 2770 \text{ €}.$$

On a :

$$C_{n+1} = \left(1 + \frac{t}{100}\right) C_n + 700 = 1,035 C_n + 700 \text{ avec } C_0 = 2000.$$

2. On pose : $u_n = C_n + 20\,000$.

a. On a :

$$u_{n+1} = C_{n+1} + 20\,000 = 1,035 C_n + 700 + 20\,000 = 1,035(u_n - 20\,000) + 700 + 20\,000$$

$$u_{n+1} = 1,035 u_n.$$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,035 et de premier terme

$$u_0 = C_0 + 20\,000 = 22\,000.$$

b. On a :

$$u_n = u_0 \times q^n = 22\,000 \times 1,035^n.$$

c. $u_n = C_n + 20\,000$ alors $C_n = u_n - 20\,000 = 22\,000 \times 1,035^n - 20\,000$.

d. On calcule C_5 soit $C_5 = 22\,000 \times 1,035^5 - 20\,000 = 6\,129 \text{ €}$.

3. Soit S la somme de ces 4 mensualités notées v_0, v_1, v_2 et v_3

On a :

$$S = \frac{4(v_0 + v_3)}{2} = 2(v_0 + v_3) \text{ et } v_3 = v_0 + 3r = v_0 + 3 \times 800 = v_0 + 2\,400 \text{ alors}$$

$$S = 2(v_0 + v_3) = 2(v_0 + v_0 + 2\,400) = 2(2v_0 + 2\,400).$$

Il suffit de résoudre l'équation :

$$S = 2(2v_0 + 2\,400) = 6\,000 \Leftrightarrow v_0 = 300 \text{ et } v_0 = 300, v_1 = 1100, v_2 = 1900 \text{ et } v_3 = 2700.$$

PROBLEME : Commun à tous les candidats (10 points)

PARTIE A : Etude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x^3 - x^2)$.

1. La fonction f est définie si $x^3 - x^2 = x^2(x-1) > 0$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x^2	+	0	+	+
$x-1$	-	-	0	+
$x^3 - x^2$	-	0	-	+

La fonction f est alors définie sur $]1; +\infty[$.

2. On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x^3 - x^2) = 0^+ \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\ln X) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty \text{ et } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln X) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

3. On a :

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^3 - x^2} = \frac{x(3x-2)}{x^2(x-1)} = \frac{3x-2}{x(x-1)}.$$

Tableau de signes de la dérivée :

x	1	$+\infty$
$3x-2$		+
x		+
$x-1$	0	+
$x^3 - x^2$		+

Conclusion :

$$f'(x) > 0 \text{ sur }]1; +\infty[.$$

On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

4. Sur $]1; +\infty[$:

- La fonction f est continue ;
- La fonction f est croissante ;
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty > 0$

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]1; +\infty[$.

A l'aide de la calculatrice, on a :

$$1 < \alpha < 2$$

$$1,4 < \alpha < 1,5 \quad \text{donc } \alpha = 1,5 \text{ à } 10^{-1}.$$

$$1,46 < \alpha < 1,47$$

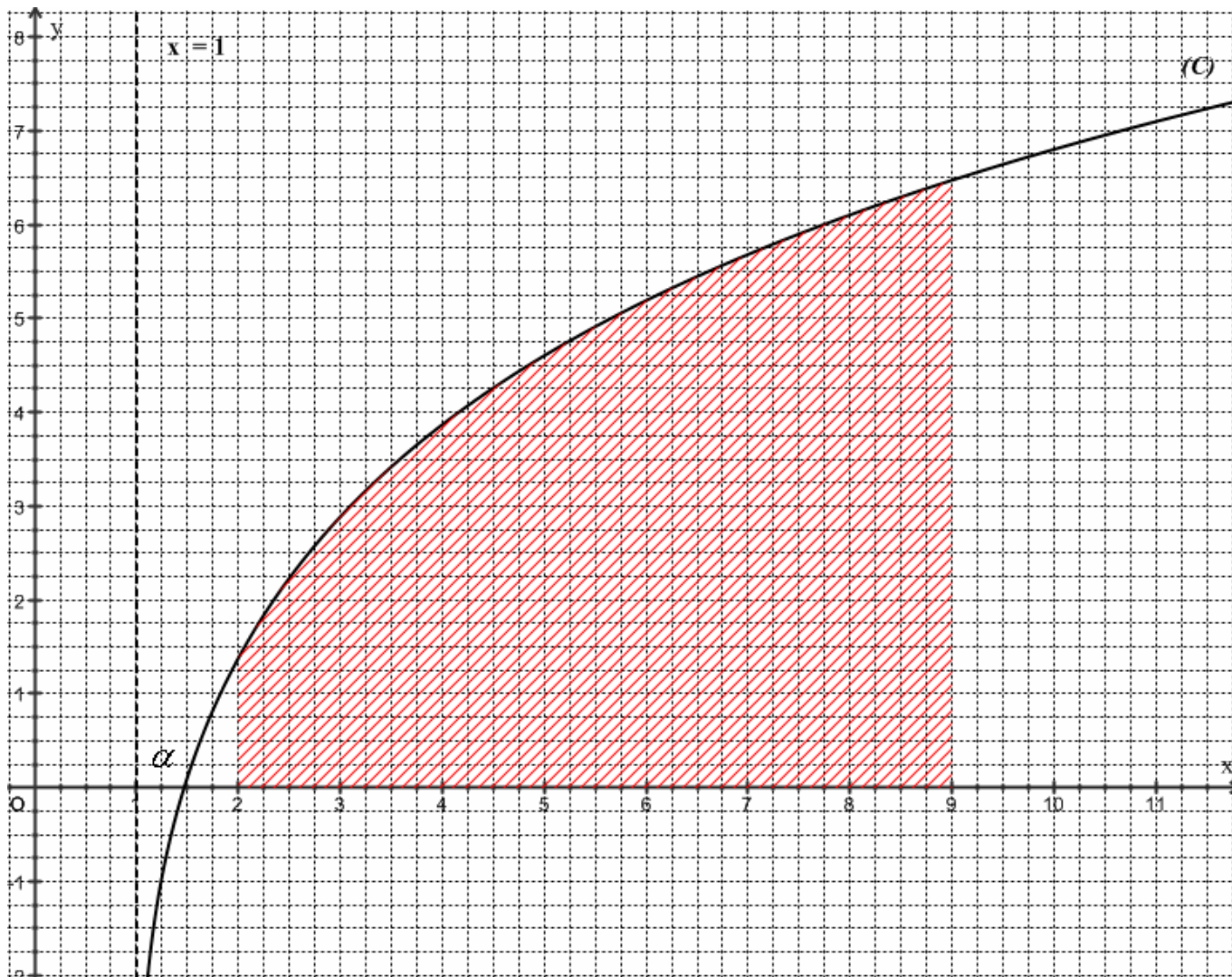
On en déduit le tableau de signe suivant :

x	1	α	$+\infty$
$f(x)$		-	0 +

Conclusion :

$$f(x) > 0 \text{ sur }]\alpha; +\infty[.$$

5. Représentation graphique de la fonction f :



6. Soit h la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $h(x) = 2x \ln x + (x-1) \ln(x-1)$.

On a :

$$h'(x) = 2 \times \ln x + 2x \times \frac{1}{x} + 1 \times \ln(x-1) + (x-1) \times \frac{1}{(x-1)} = 2 \ln x + \ln(x-1) + 3$$

$$h'(x) = \ln(x^2) + \ln(x-1) + 3 = \ln[x^2(x-1)] + 3 = \ln(x^3 - x^2) + 3$$

$$h'(x) = f(x) + 3.$$

On en déduit que $f(x) = h'(x) - 3$ donc une primitive F de la fonction f est : $F(x) = h(x) - 3x$.

PARTIE B : Interprétation économique

On pose $c(x) = \ln(x^3 - x^2)$.

1. De la question B.6., on a : $C_T(x) = h(x) - 3x + c$ or $C_T(2) = 10$ alors

$$C_T(2) = h(2) - 6 + c = 10 \Leftrightarrow c = 16 - 4 \ln 2 \text{ d'où : } C_T(x) = h(x) - 3x + 16 - 4 \ln 2.$$

2. On a :

$$C_T(9) = 36 \ln 3 + 20 \ln 2 - 11 \text{ et } C_T(2) = 10 \text{ donc}$$

$$\int_2^9 c(x) dx = C_T(9) - C_T(2) = 36 \ln 3 + 20 \ln 2 - 11 - 10 = 32,413 \text{ soit } 32\,413 \text{ euros.}$$

C'est l'aire hachurée sur le graphique en unité d'aire soit : 32,413 u.a.