CORRECTION Baccalauréat ES Amérique du Nord mai 2004

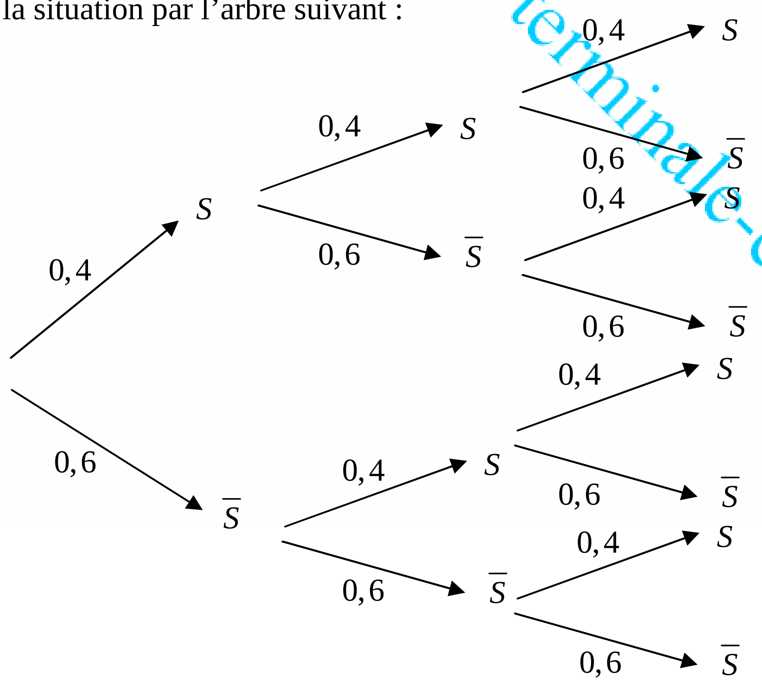
EXERCICE n°1 : Commun à tous les candidats (*5 points*)

PARTIE A :

On obtient le tableau suivant :

	Sacs à dos	Cartable	Total
11 ans	2	10	12
12 ans	5	3	8
13 ans	3	2	5
Total	10	15	25

1. Calculs des probabilités :
   a. On a : $p(S)=\dfrac{10}{25}=0,4$.
   b. On a : $p(C\cap T)=\dfrac{2}{25}=0,08$.
2. On traduire la situation par l'arbre suivant :

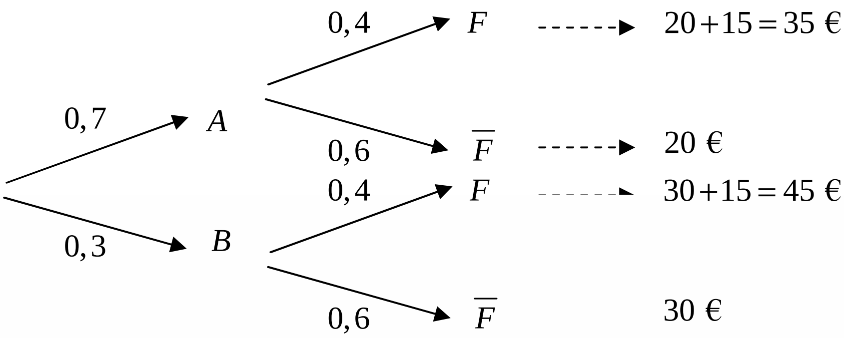


La probabilité qu'exactement deux d'entre eux aient un sac à dos est donnée par :

$$p=P\left(S\cap S\cap\overline{S}\right)+P\left(S\cap\overline{S}\cap S\right)+P\left(\overline{S}\cap S\cap S\right)\overset{\text{Par indépendance}}{=}3\times P(S)^2\times P\left(\overline{S}\right)=3\times 0,4^2\times 0,6=0,288.$$

PARTIE B :

1. Construisons l'arbre des probabilités associé à la situation décrite ci-dessus :



2. La probabilité qu'un élève ait pris le contrat B et soit adhérent du foyer est :

$$p = P(B \cap F) \overset{\text{Par indépendance}}{=} P(B) \times P(F) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12.$$

3. A chaque élèves pris au hasard, on associe le coût X de son inscription.
   a. Les valeurs possibles de ce coût sont : $\{20; 30; 35; 45\}$.
   b. Loi de probabilité de ce coût :

x_i	20	30	35	45
$P(X = x_i)$	0,42	0,18	0,28	0,12

$$P(X = 20) = P(A \cap \overline{F}) \overset{\text{Par indépendance}}{=} P(A) \times P(\overline{F}) = 0{,}42.$$
$$P(X = 30) = P(B \cap \overline{F}) \overset{\text{Par indépendance}}{=} P(B) \times P(\overline{F}) = 0{,}18.$$
$$P(X = 35) = P(A \cap F) \overset{\text{Par indépendance}}{=} P(A) \times P(F) = 0{,}28.$$
$$P(X = 45) = P(B \cap F) = 0{,}12.$$

   c. L'espérance mathématique de cette loi est :

$$E(X) = 20 \times 0{,}42 + 30 \times 0{,}18 + 35 \times 0{,}28 + 45 \times 0{,}12 = 29 \text{ €}.$$

Cela signifie, qu'en moyenne, les élèves payent 29 €.

EXERCICE n°2 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (*5 points*)

1. VRAI OU FAUX :
   a. ***Vrai*** :

$$\frac{38{,}6 - 33{,}8}{33{,}8} = 0{,}142 \text{ soit } 14{,}2\ \%.$$

   b. ***Vrai*** :

Entre 1999 et 2000 : $\dfrac{53{,}9 - 49}{49} = 0{,}1$ soit 10 %.

Entre 2000 et 2001 : $\dfrac{59{,}29 - 53{,}9}{53{,}9} = 0{,}1$ soit 10 %.

   c. ***Faux*** :

$$20,4(1+t)^6 = 59,29 \Leftrightarrow 6\ln(1+t) = \ln\left(\frac{59,29}{20,4}\right) \Leftrightarrow \ln(1+t) = \frac{\ln\left(\frac{59,29}{20,4}\right)}{6}$$ soit 19,5 %.

$$0,4(1+t)^6 = 59,29 \Leftrightarrow t = e^{\frac{\ln\left(\frac{59,29}{20,4}\right)}{6}} - 1 = 0,195.$$

d. ***Faux*** :

$$\bar{x} = \frac{0+1+2+3+4+5+6}{7} = 3 \text{ et } \bar{y} = \frac{20,4+24,2+33,8+38,6+49+53,9+59,29}{7} = 39,9.$$

2. Un ajustement affine peut être envisagé car les points sont presque alignés.
   On trouve aisément que le chiffre d'affaire sera de 79 millions € en 2004.
   A l'aide de la calculatrice, on trouve l'équation suivante : $y = 6,83x + 19,39$ et
   $n_2 = 6,83 \times 9 + 19,39 = 80,86$ millions €.
3. $u_0 = 49$; $u_1 = 53,9$ et $u_2 = 59,29$.

   a. On a : $u_1 = q \times u_0 \Leftrightarrow q = \dfrac{53,9}{49} = 1,1$.

   b. On a : $u_5 = q^5 \times u_0 \Leftrightarrow u_5 = 1,1^5 \times 49 = 78,915$ donc en 2004 le chiffre d'affaire sera de 78 ,915 millions €.

<u>EXERCICE n°2</u> : Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité (*5 points*)

PARTIE A :

1. On a le tableau suivant :

Sommets	A	B	C	D	E	F
Degrés	4	4	2	2	3	5

A1 : Il existe uniquement deux sommets de degré impair donc le graphe G_1 admet au moins une chaîne eulérienne.
A2 : Il aurait fallu que l'on parte du sommet E (ou F) et que l'on arrive au sommet F (ou E).

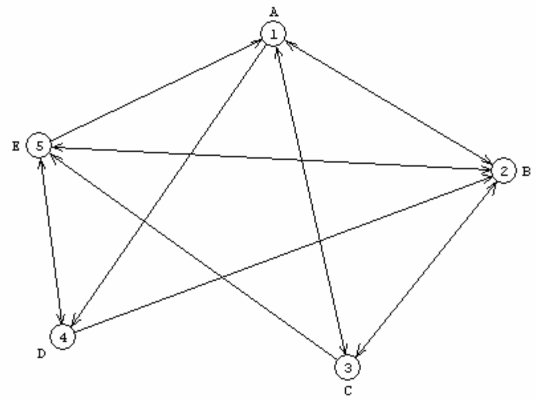
2. Sous complet d'ordre 4 maximal de G_1 : graphe composé des sommets A, B, E et F.
   On a : $4 \leq \gamma$.
3. Le degré maximal de G_1 est 5 donc $\gamma \leq 5+1$ soit $4 \leq \gamma \leq 6$.
4. Coloriage du graphe :

Sommets	C	D	E	A	B	F
Degrés	2	2	3	4	4	5
Couleurs	Bleu	Bleu	Bleu	Noir	Vert	Rouge

On a utilisé 4 couleurs et $4 \leq \gamma \leq 6$ donc $\gamma = 4$.

PARTIE B :

1. Construisons le graphe G_2 :



2. On a $M^3_{(2;4)} = 3$ donc il existe 3 chaînes de longueur 3 reliant B à D :
   B – C – E – D ; B – E – A – D et B – C – A – D.

<u>EXERCICE n°3</u> : commun à tous les candidats (5 *points*)

1. Equation de la tangente au point d'abscisse 0 : $y = -5x + 10$.
2. Tableau de variations de la fonction f :

x	-2		-1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	13	$\searrow$	2

Conclusion :
La fonction f est croissante sur $[-2;-1]$ et décroissante sur $[-1;3]$.

3. Sur la figure 1 : $f'(x) \leq 0$ sur $[-2;3]$ donc elle ne convient pas.
   Sur la figure 2 : $f'(x) \geq 0$ sur $[-2;3]$ donc elle ne convient pas.
   Sur la figure 4 : $f'(0) = -2 \neq -5$ donc elle ne convient pas.
   Conclusion :
   La figure 3 convient.
4. On pose : $f(x) = (ax+b)e^{kx}$.
   a. On a : $f'(x) = a \times e^{kx} + (ax+b) \times ke^{kx} = (akx + bk + a)e^{kx}$.
   b. On a :
   $$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(0) = 10 \\ f'(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2a+b)e^{-2k} = 0 \\ b = 10 \\ (-ak+bk+a)e^{-k} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2a+10) = 0 \\ b = 10 \\ -ak + 10k + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 10 \\ k = -1 \end{cases}$$
   soit : $f(x) = (5x+10)e^{-x}$.

<u>EXERCICE n°5</u> : Commun à tous les candidats (5 *points*)

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2(1+\ln x)}{x}$.

1. Résolution sur $]0;+\infty[$ de l'équation $f(x)=0$:

   On a :

   $$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2(1+\ln x)}{x}=0 \Leftrightarrow 1+\ln x=0 \Leftrightarrow x=e^{-1}\simeq 0{,}368.$$

   Résolution sur $]0;+\infty[$ de l'inéquation $f(x)>0$:

   On a :

   $1+\ln x>0 \Leftrightarrow x>e^{-1}$.

   D'où, le tableau de signe suivant :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$1+\ln x$		$-$	0	$+$	
x	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

   Conclusion:

   $f(x)>0$ si $x\in\left]e^{-1};+\infty\right[$.

2. On a:

   - $$f'(x)=2\times\frac{\frac{1}{x}\times x-(1+\ln x)\times 1}{x^2}=-\frac{2\ln x}{x^2}$$ d'où le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
$-2\ln x$		$+$	0	$-$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	2	$\searrow$	

   - $$f(1)=\frac{2(1+\ln 1)}{1}=2.$$
   - $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}2(1+\ln x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x)=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty.$$
   - $$f(x)=\frac{2(1+\ln x)}{x}=\frac{2}{x}+\frac{2\ln x}{x} \text{ donc } \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2\ln x}{x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

3. D'après la question 1.b., l'entreprise doit vendre 386 objets pour réaliser un bénéfice.
   D'après le tableau de variation, il faut vendre 1 000 objets pour réaliser un bénéfice maximal de 2 000 euros.