CORRECTION DU SUJET : AMERIQUE DU NORD JUIN 2005

EXERCICE n°1 : ***enseignement obligatoire et de spécialité***

1. Notons t le pourcentage de baisse annuel.
   On a :

$$\left(1-\frac{t}{100}\right)^5=1-\frac{30}{100}\Leftrightarrow\left(1-\frac{t}{100}\right)^5=0,7\Leftrightarrow\ln\left[\left(1-\frac{t}{100}\right)^5\right]=\ln 0,7\Leftrightarrow 5\ln\left(1-\frac{t}{100}\right)=\ln 0,7$$

$$\Leftrightarrow\ln\left(1-\frac{t}{100}\right)=\frac{\ln 0,7}{5}\Leftrightarrow e^{\ln\left(1-\frac{t}{100}\right)}=e^{\frac{\ln 0,7}{5}}\Leftrightarrow 1-\frac{t}{100}=e^{\frac{\ln 0,7}{5}}\Leftrightarrow t=100\left(1-e^{\frac{\ln 0,7}{5}}\right)\simeq 6,89\ \%.$$

2. On a :

$$\left(1-\frac{5}{100}\right)\times\left(1-\frac{1}{100}\right)\times\left(1-\frac{3}{100}\right)=0,912285=1-\frac{0,87715}{100}\text{ soit une baisse de 8,7 \%.}$$

   Notons t le pourcentage de baisse sur les deux dernières années.
   On doit alors avoir :

$$\left(1-\frac{t}{100}\right)^2\left(1-\frac{5}{100}\right)\times\left(1-\frac{1}{100}\right)\times\left(1-\frac{3}{100}\right)=0,7\Leftrightarrow\left(1-\frac{t}{100}\right)^2\times 0,912285=0,7$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\frac{t}{100}\right)^2=\frac{0,7}{0,912285}\Leftrightarrow\ln\left[\left(1-\frac{t}{100}\right)^2\right]=\ln\left(\frac{0,7}{0,912285}\right)\Leftrightarrow 2\ln\left(1-\frac{t}{100}\right)=\ln\left(\frac{0,7}{0,912285}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ln\left(1-\frac{t}{100}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{0,7}{0,912285}\right)\Leftrightarrow e^{\ln\left(1-\frac{t}{100}\right)}=e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{0,7}{0,912285}\right)}\Leftrightarrow 1-\frac{t}{100}=e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{0,7}{0,912285}\right)}$$

$$\Leftrightarrow t=100\left(1-e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{0,7}{0,912285}\right)}\right)\simeq 12,4\ \%.$$

EXERCICE n°2 : ***enseignement obligatoire uniquement***

1. Les points M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5 ne sont pas suffisamment proches d'une droite pour envisager un ajustement affine.

2. On pose $z=\ln y$.
   a. Tableau de valeurs :

x_i	1	4	6	8	10
z_i	5,17	5,34	5,65	5,94	6,23

   b. Voir graphique ci-dessous.

3. Une équation de la droite (D) d'ajustement de z en x est : $z=0,122x+4,96$.
   On en déduit que :

$$\ln y=0,122x+4,96\Leftrightarrow e^{\ln y}=e^{0,122x+4,96}\Leftrightarrow y=e^{0,122x}\times e^{4,96}\Leftrightarrow y=\left(e^{0,122}\right)^x\times e^{4,96}$$

   On a : $A=e^{4,96}\simeq 143$ et $k=e^{0,122}\simeq 1,13$.

4. L'année 2005 correspond au rang 12 et $143\times 1{,}13^{12}=619{,}837$ donc la chiffre d'affaires estimé en 2005 s'élève à 619,837 millions d'euros.
On résout l'inéquation :

$$143\times 1{,}13^{x}\geq 1000 \Leftrightarrow 1{,}13^{x}\geq \frac{1000}{143} \Leftrightarrow \ln\left(1{,}13^{x}\right)\geq \ln\left(\frac{1000}{143}\right) \Leftrightarrow x\ln 1{,}13\geq \ln\left(\frac{1000}{143}\right)$$

$$\Leftrightarrow x\geq \frac{\ln\left(\frac{1000}{143}\right)}{\ln 1{,}13} \Leftrightarrow x\geq 16.$$

C'est à partir de l'année 2009, que le chiffre d'affaires sera supérieur à 1 milliards d'euros.

<u>EXERCICE n°2</u> : ***enseignement de spécialité uniquement***

1. Soit H_1 et H_2 les hyperboles d'équations respectives $y=\frac{1}{x}$ et $y=\frac{2}{x}$.
D_2 est le domaine du plan délimité par H_1, H_2 et les droites d'équations $x=2$ et $x=3$.
D'_2 est le domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, H_1 et les droites d'équations $x=2$ et $x=3$.
Pour tout $x\in[2;3]$, $\frac{1}{x}>0$ donc l'aire A'_2 du domaine D'_2, exprimé en unités d'aire est :

$$A'_2=\int_2^3 \frac{1}{x}dx.$$

Pour tout $x>0$, on a $\frac{1}{x}>\frac{2}{x}$ donc l'aire A_2 du domaine D_2, exprimé en unités d'aire est :

$$A_2=\int_2^3\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x}\right)dx=\int_2^3\frac{1}{x}dx=A'_2.$$

2. On a :

$$u_n=\int_n^{n+1}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x}\right)dx=\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx=\left[\ln x\right]_n^{n+1}=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

3. On a :

$$u_{n+1}-u_n=\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln\left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)=\ln\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right].$$

De plus :

$$(n+1)^2=n^2+2n+1=n(n+2)+1$$

Donc :

$$\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}>1 \text{ soit } \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}<1.$$

Et :

$u_{n+1}-u_n=\ln\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]<\ln 1 \Leftrightarrow u_{n+1}-u_n<0 \Leftrightarrow u_{n+1}<u_n$ ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante.

4. On montre facilement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

5. On a :

$$u_n>\frac{1}{10} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)>\frac{1}{10} \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{10} \Leftrightarrow e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}>e^{\frac{1}{10}} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{n}>e^{\frac{1}{10}} \Leftrightarrow n<\frac{1}{e^{\frac{1}{10}}-1}$$ soit $N=9$.

6. On a :

$$A=\int_1^9\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^9\frac{1}{x}dx=\ln 9.$$

<u>EXERCICE n°3</u> : *enseignement obligatoire et de spécialité*

1. L'abscisse $\overline{x}$ du point moyen est :

$$\overline{x}=\frac{1+2+5+7+11+13}{6}=6,5.$$

La droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés a pour équation $y=1,35x+22,8$ et on sait que cette droite passe par le point moyen de coordonnées $(\overline{x};\overline{y})$. On en déduit que :

$$\overline{y}=1,35\overline{x}+22,8=1,35\times 6,5+22,8=31,575.$$

2. (u_n) est une suite arithmétique de raison -5 alors :

$$u_{n+1}=u_n+r=u_n-5 \text{ et } u_n=u_p+(n-p)r \text{ soit } u_7=u_3+(7-3)\times(-5)=u_3-20 \Leftrightarrow u_3=u_7+20.$$

3. Cette égalité est vérifiée si :

$$x^2-1>0 \text{ et } x-1>0 \text{ et } x+1>0 \text{ donc si } x\in\left]1;+\infty\right[.$$

4. On a :

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+2}=\frac{e^x\left(1-e^{-x}\right)}{e^x\left(1+2e^{-x}\right)}=\frac{1-e^{-x}}{1+2e^{-x}}.$$

5. On a :

$$I-J=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{1-e^x}{e^x-1}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}(-1)\,dx=\left[-x\right]_{\ln 2}^{\ln 3}=-\ln 3+\ln 2=\ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

6. On a :

$$\left(1-\frac{2}{100}\right)^x\le 0,5 \Leftrightarrow 0,98^x\le 0,5 \Leftrightarrow \ln\left(0,98^x\right)\le \ln 0,5 \Leftrightarrow x\ln 0,98\le \ln 0,5 \Leftrightarrow x\ge\frac{\ln 0,5}{\ln 0,98}$$

d'où : $S = \left[\dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,98} ; +\infty \right[$.

<u>EXERCICE n°4</u> : ***enseignement obligatoire et de spécialité***

1. La tangente à (Γ) au point D d'abscisse -1 étant parallèle à l'axe des abscisses, nous avons $f'(-1) = 0$. Seules les courbes 1 et 2 passent par le point de coordonnées $(-1;0)$ donc la courbe 3 ne peut pas représenter la fonction dérivée f' de *f*.
   B admet pour coordonnées $(2;0)$ et (AB) est tangente à (Γ) au point A de coordonnées $(0;2)$. Le coefficient directeur de (AB) étant égal à $\dfrac{0-2}{2-0} = -1$, on en déduit que $f'(0) = -1$. La courbe représentant f' passe donc par le point $(0;-1)$ et seules les courbes 1 et 3 vérifient cette condition.
   On en déduit que la courbe 1 représente la fonction dérivée f'.

   Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   Nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$ et les variations de F sont donc données par le signe de *f*. Or, pour tout $x \in \left]-\infty;-2\right[$, $f(x) < 0$ et pour tout $x \in \left]-2;+\infty\right[$, $f(x) > 0$. On en déduit que F est strictement décroissante sur $\left]-\infty;-2\right[$ et strictement croissante sur $\left]-2;+\infty\right[$.
   La courbe représentant une primitive F de f est la courbe 3.

2. On a :
   $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$ avec $f'(x) = 1 \times e^{\alpha x} + (x+K) \times \alpha e^{\alpha x} = (1 + \alpha x + \alpha K) e^{\alpha x}$.

   $$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ke^0 = 2 \\ (1+\alpha K)e^0 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K = 2 \\ \alpha = -1 \end{cases} \text{ soit } f(x) = (x+2)e^{-x}.$$

3. Soit $\varphi(x) = (-x-3)e^{-x}$.
   On a :
   $\varphi'(x) = -1 \times e^{-x} + (-x-3) \times (-1) \times e^{-x} = (x+2)e^{-x} = f(x)$ donc φ est une primitive de *f*.

   On a :
   $$a = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \left[\varphi(x)\right]_{-2}^{0} = e^2 - 3 \simeq 4,39.$$