EXERCICE n°4 :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

   a. Montrer que $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   Préciser sa raison et son premier terme.

   b. Exprimer v_n en fonction de n.

   c. Montrer que $v_n = -\frac{3}{4}u_n + 3$ puis $u_n = \frac{4(3-v_n)}{3}$ et que $u_n = -3\times\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$.

   d. Déduire de ce qui précède la limite de la suite (u_n).
3. Le plan est rapporté à un repère orthonormal (Unité : 2 cm).
   Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$.

   a. Tracer la représentation graphique (D) de la fonction f ainsi que la droite (Δ) d'équation $y = x$.

   b. Placer sur le graphique u_0 et en utilisant les droites (D) et (Δ), placer u_1 , u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses. On laissera les traits de construction apparents.