CORRECTION

EXERCICE n°4 :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$.

1. Calculons u_1 , u_2 et u_3 :

$$u_1 = \frac{1}{4}u_0 + 3 = \frac{13}{4}\ ;\ u_2 = \frac{1}{4}u_1 + 3 = \frac{61}{16}\ ;\ u_3 = \frac{1}{4}u_2 + 3 = \frac{253}{64}.$$

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

   a. Montrons que $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$:

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \left(\frac{1}{4}u_{n+1} + 3\right) - \left(\frac{1}{4}u_n + 3\right) = \frac{1}{4}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{4}v_n.$$

   La suite (v_n) est un suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme

   $v_0 = u_1 - u_0 = \frac{13}{4} - 1 = \frac{9}{4}$.

   b. Exprimons v_n en fonction de n :

$$v_n = v_0 \times q^n = \frac{9}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

   c. Montrons que $v_n = -\frac{3}{4}u_n + 3$ puis $u_n = \frac{4(3 - v_n)}{3}$ et que $u_n = -3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$:

   - $v_n = u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{4}u_n + 3\right) - u_n = -\frac{3}{4}u_n + 3$.
   - $v_n = -\frac{3}{4}u_n + 3 \Leftrightarrow u_n = -\frac{4}{3}(v_n - 3) = \frac{4(3 - v_n)}{3}$.
   - $u_n = \frac{4(3 - v_n)}{3} = \frac{4\left[3 - \frac{9}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{3} = \frac{12 - \frac{36}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n}{3} = 4 - 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n.$

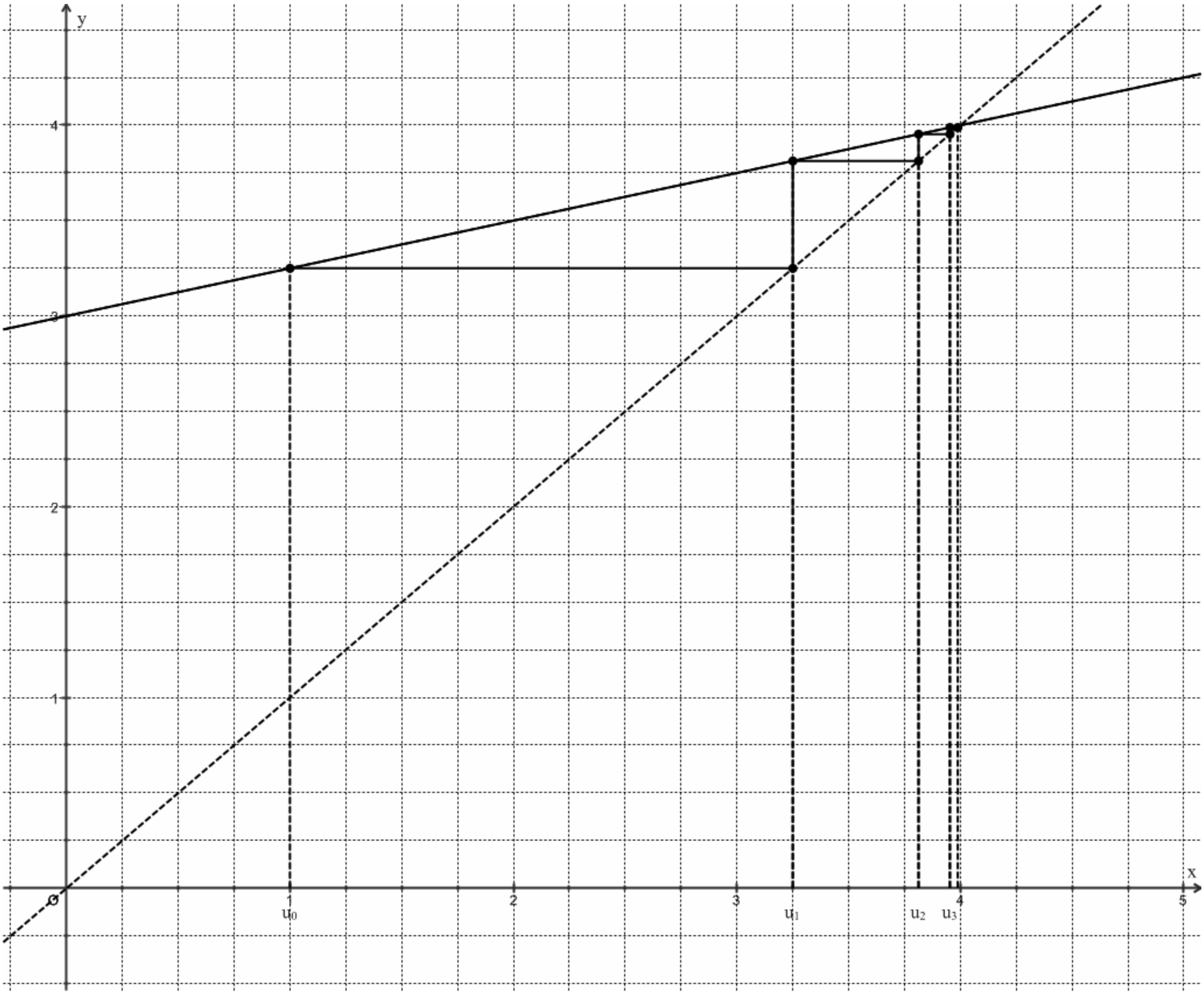
   d. Déduisons de ce qui précède la limite de la suite (u_n) :

$$-1 < \frac{1}{4} < 1 \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \text{ d'où : } \lim_{n \to +\infty} (u_n) = 4$$

3. Le plan est rapporté à un repère orthonormal (Unité : 2 cm).

   Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$.

   a. Traçons la représentation graphique (D) de la fonction f ainsi que la droite (Δ) d'équation $y = x$. et plaçons sur le graphique u_0 et en utilisant les droites (D) et (Δ), plaçons u_1 , u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.


y
x
O
1
2
3
4
5
u_0
u_1
u_2
u_3