

CORRECTION

EXERCICE n°1 :

Monsieur Dupré, PDG d'une société fabriquant du mobilier urbain, s'intéresse au coût unitaire de production, en euros, ainsi qu'au bénéfice réalisé pendant une semaine. On considère qu'il fabrique par semaines x lots de mobilier urbain, où x est un entier compris entre 0 et 100.

Partie A :

La courbe donnée *en annexe* représente le coût unitaire de production $f(x)$, en fonction du nombre x de lots fabriqués.

1. Lorsque Monsieur Dupré fabrique 70 lots, le coût unitaire de production est de 4 000 €. Le même coût unitaire de production est atteint pour 14 ou 15 lots fabriqués.
2. La quantité de lots que l'entreprise doit produire pour que le coût unitaire soit minimal est de 42 et la valeur de ce coût est de 3 236 €.
3. On admet que $f(x)$ a pour expression :

$$f(x) = x^2 + bx + 5000.$$

Déterminons le réel b sachant que le coût unitaire pour 100 lots est de 6 600 euros :

On a :

$$f(100) = 6600 \Leftrightarrow 100^2 + 100b + 5000 = 6600 \Leftrightarrow b = -84.$$

Partie B :

1. Montrons que le coût de production $C(x)$ pour x lots produits est : $C(x) = x^3 - 84x^2 + 5000x$: On a :

$$C(x) = x \times f(x) = x(x^2 - 84x + 5000) = x^3 - 84x^2 + 5000x.$$

2. Chaque lot étant vendu 5 000 euros, justifions que le bénéfice, exprimé en euros, pour la production et la vente de x lots est donné par la fonction B définie par : $B(x) = -x^3 + 84x^2$:

On a :

$$B(x) = 5000x - C(x) = 5000x - (x^3 - 84x^2 + 5000x) = -x^3 + 84x^2.$$

3. Factorisons $B(x) = -x^3 + 84x^2$ et dressons son tableau de signe :

$$\text{On a : } B(x) = -x^3 + 84x^2 = x^2(-x + 84).$$

x	0	84	100
x^2	+		+
$-x + 84$	+	0	-
$B(x)$	+	0	-

Conclusion :

$$\begin{cases} B(x) = 0 & \text{si } x = 84 \\ B(x) > 0 & \text{si } x \in [0; 84[\\ B(x) < 0 & \text{si } x \in]84; 100] \end{cases}$$

Monsieur Dupré est alors bénéficiaire si sa production est comprise entre 0 et 84 lots.

4. Déterminons $B'(x)$:

$$\text{On a : } B'(x) = -3x^2 + 168x = 3x(-x + 56)$$

Dressons le tableau de variation de la fonction B sur $[0; 100]$:

x	0	56	100
$3x$		+	+
$-x+56$		0	-
$B'(x)$		+	-
$B(x)$	0	87 808	-160 000

Le nombre x_M de lots que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser un bénéfice maximal est de 56 et ce bénéfice maximal B_M est de 87 808 €.

