CORRECTION

EXERCICE n°5 :

Les probabilités demandées seront exprimées sous forme de fractions irréductibles.

Une boîte de jeu est constituée de questions portant sur les deux thèmes « Cinéma » ou « Musique ».
Cette boîte contient un tiers de questions portant sur le thème « Cinéma », les autres portant sur le thème « Musique ».
Le candidat à ce jeu s'appelle Pierre.

Première partie

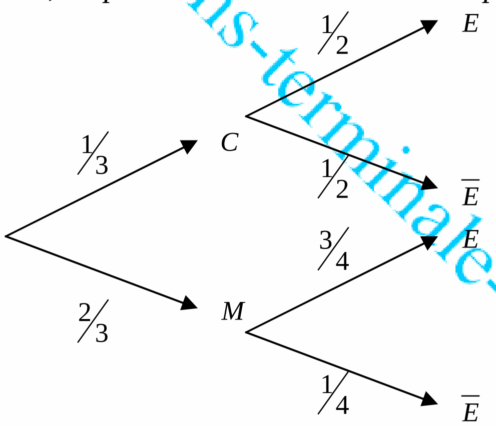
Dans cette partie, on pose à Pierre une question choisie au hasard dans la boîte et on sait que :

- La probabilité que Pierre réponde correctement à une question du thème « Cinéma » est égale à $\frac{1}{2}$.
- La probabilité que Pierre réponde correctement à une question du thème « Musique » est égale à $\frac{3}{4}$.

On considère les événements suivants :

- C : la question porte sur le thème « Cinéma » ;
- M : la question porte sur le thème « Musique » ;
- E : Pierre répond correctement à la question posée.

(*Pour répondre à ces questions, on pourra s'aider d'un arbre de probabilités*)



1. Déterminons la probabilité de l'événement : « La question porte sur le thème « Musique » et Pierre y a répondu correctement » :

   On a : $P(M\cap E)=P(M)\times P_M(E)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$.

2. Montrons que la probabilité de l'événement E est égale à $\frac{2}{3}$:

   On a : $P(E)=P(C\cap E)+P(M\cap E)=P(C)\times P_C(E)+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$.

3. On suppose que Pierre n'a pas répondu correctement à la question posée, la probabilité pour que la question ait porté sur le thème « Cinéma » est :

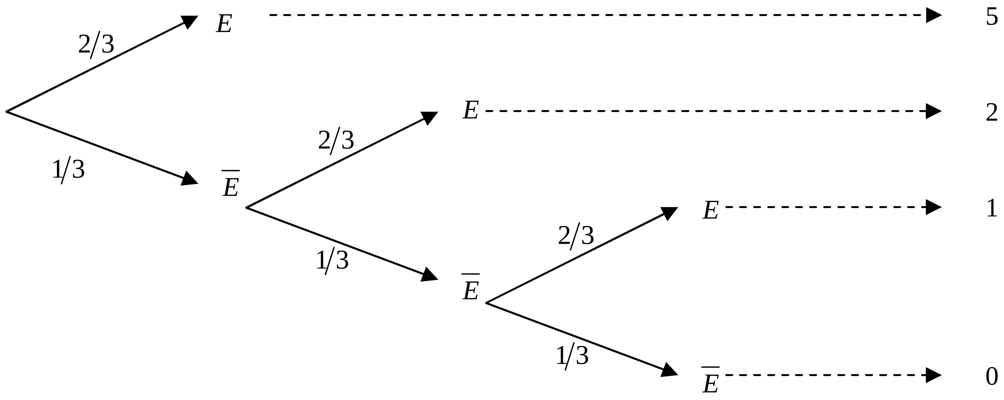
$$P_{\overline{E}}(C)=\frac{P\left(C\cap\overline{E}\right)}{P\left(\overline{E}\right)}=\frac{P(C)\times P_C\left(\overline{E}\right)}{1-P(E)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}.$$

Deuxième partie

En fait le jeu se déroule de la façon suivante :

On pose à Pierre une première question (selon les modalités décrites dans la première partie) et il marque 5 points s'il répond correctement et le jeu s'arrête.
Sinon, on lui pose une deuxième question, choisie,indépendamment de la première et il marque 2 points s'il répond correctement et le jeu s'arrête.
Sinon, on lui pose une troisième question (choisie indépendamment des deux précédentes) et il marque 1 point s'il répond correctement.
Sinon le jeu s'arrête et il ne marque aucun point.

1. Traduisons cette situation à l'aide d'un arbre de probabilités :



2. Définissons la loi de probabilité du nombre de points marqués par Pierre :
   On a :

x_i	0	1	2	5
$P(X=x_i)$	$P(\overline{E}\cap\overline{E}\cap\overline{E})$	$P(\overline{E}\cap\overline{E}\cap E)$	$P(\overline{E}\cap E)$	$P(E)$

   Avec :

$$P(E)=\frac{2}{3}\ ;\ P(\overline{E}\cap E)\overset{\textit{Par indépendance}}{=}P(\overline{E})\times P(E)=\frac{2}{9}\ ;$$

$$P(\overline{E}\cap\overline{E}\cap E)\overset{\textit{Par indépendance}}{=}P(\overline{E})^2\times P(E)=\frac{2}{27}\ \text{et}\ P(\overline{E}\cap\overline{E}\cap\overline{E})\overset{\textit{Par indépendance}}{=}P(\overline{E})^3=\frac{1}{27}\ .$$

3. Calculons l'espérance mathématique du nombre de points marqués par Pierre :
   On a :

$$E(X)=0\times\frac{1}{27}+1\times\frac{2}{27}+2\times\frac{2}{9}+5\times\frac{2}{3}=\frac{104}{27}\simeq 3{,}85\,.$$