

EXERCICE n°32 :

PARTIE A :

La fonction h est définie sur l'intervalle $[0;8]$ par : $h(x) = x^2 + \frac{16x}{2x+1} - 8\ln(2x+1)$.

1. Montrer que : $h'(x) = \frac{2x(2x+5)(2x-3)}{(2x+1)^2}$ où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0;8]$.
2. Etudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0;8]$.
3. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\frac{3}{2};8\right]$.
Déterminer une valeur approchée de α , arrondie à 0,01 près.
4. Dédire des résultats précédents le signe de la fonction h sur l'intervalle $[0;8]$.

PARTIE B :

La fonction M est définie sur l'intervalle $[0;8]$ par : $M(x) = x + \frac{8}{2x+1}$.

La fonction C_T est la primitive de la fonction M sur l'intervalle $[0;8]$ qui s'annule pour $x=0$.

Montrer que : $C_T(x) = \frac{x^2}{2} + 4\ln(2x+1)$.

PARTIE C :

Une entreprise produit une quantité variable x d'appareils (x est exprimé en milliers d'appareils) dont le coût marginal M est la fonction définie dans la partie B.

Dans la suite du problème, tous les coûts seront exprimés en milliers d'euros).

On modélise le coût total de production de x milliers d'appareils, pour x appartenant à l'intervalle

$\left[\frac{1}{4};8\right]$ par la fonction C_T définie dans la partie B.

1. Vérifier que le coût moyen, par milliers d'appareils, est défini sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4};8\right]$ par :

$$C_m(x) = \frac{x}{2} + \frac{4\ln(2x+1)}{x}.$$

2. Calculer $C'_m(x)$ où C'_m désigne la fonction dérivée de la fonction C_m et vérifier que l'on a :

$$C'_m(x) = \frac{h(x)}{2x^2} \text{ où } h \text{ est la fonction étudiée dans la partie A.}$$

3. Etudier les variations de la fonction C_m et dresser son tableau de variation.
4. Pour quelle production, arrondie à la dizaine près, le coût moyen, par milliers d'appareils, est-il minimum ?