EXERCICE n°31 :

Soit la fonction f définie sur $[0;50]$ par :

$$f(x)=x^2+\frac{50x}{x+1}-50\ln(x+1)-50.$$

1. Montrer que : $f'(x)=\dfrac{2x(x-4)(x+6)}{(x+1)^2}$.

   Etudier son signe et dresser le tableau des variations de f sur $[0;50]$.

   Justifier que $f(x)$ s'annule pour une seule valeur α de l'intervalle $[0;50]$.

   En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0;50]$.

   On donnera une valeur arrondie de α à 0,5 près.
2. Un entreprise fabrique une quantité x, exprimée en kilogrammes, d'un certain produit.
   Le coût marginal, exprimé en euros par kilogramme, est défini sur $[0;50]$ par :

   $$C_m(x)=2x+\frac{50}{x+1}.$$

   a. Montrer que le coût total en euros $C_T(x)$ est donné par :

   $$C_T(x)=x^2+50\ln(x+1)+50$$

   Avec un montant des coûts fixes de 50 euros.

   b. Le coût moyen, en euros par kilogramme, est donné par :

   $$C_M(x)=\frac{C_T(x)}{x} \text{ sur }]0;50].$$

   Montrer que la dérivée du coût moyen peut se mettre sous la forme :

   $$C'_M(x)=\frac{f(x)}{x^2}.$$
3. Déduire des résultats obtenus précédemment, le tableau des variations du coût moyen C_M sur $]0;50]$.

   Dans un repère orthonormal, tracer la courbe représentative de C_M sur $[1;50]$.

   Pour quelle quantité le coût moyen est-il minimal ?
   Calculer le coût marginal correspondant au coût moyen minimal.
   Vérifier que le coût marginal est alors égal au coût moyen arrondi à un euros près. Calculer alors le coût total.