EXERCICE n°30 :

Une entreprise fabrique un produit, en quantité x, exprimée en milliers de tonnes.
Le coût total de fabrication est donné pour $x \in [0;5]$ par :

$$C_T(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{9}{2}\ln(x+1).$$

Les coûts sont exprimés en centaines de milliers d'euros.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction f définie sur $[0;5]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{9x}{x+1} - 9\ln(x+1).$$

1. Calculer $f'(x)$.

   Vérifier que l'on peut écrire $f'(x) = \dfrac{x(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$.
2. Etablir le tableau des variations de f sur $[0;5]$.
3. En déduire que f s'annule sur $]0;5]$ pour une valeur unique a.
4. Déterminer un encadrement, à 10^{-3} près, de a.
5. Déduire des résultats précédents le signe de f sur $[0;5]$.

Partie B : étude d'un coût moyen

La fonction coût moyen C_M est définie sur $]0;5]$ par :

$$C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x} = \frac{x}{4} + \frac{9}{2}\frac{\ln(x+1)}{x}.$$

1. Calculer $C'_M(x)$.

   Vérifier que l'on peut écrire $C'_M(x) = \dfrac{f(x)}{2x^2}$, où f est la fonction auxiliaire de la question ***A***.
2. Etudier le sens de variation de C_M sur $]0;5]$.
3. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal, exprimé en euros par tonne ?
   Quel est ce coût ?