CORRECTION

EXERCICE n°33 :

Partie A

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Etudions le signe de la fonction f sur $]0;+\infty[$:

   On a : $1+\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow \ln x>-\ln e \Leftrightarrow \ln x>\ln\left(e^{-1}\right) \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{e}$ et comme $x>0$ on obtient le tableau de signes suivant :

x	0		$\dfrac{1}{e}$		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

   Conclusion :

$$\begin{cases} f(x)=0 \ si \ x=\dfrac{1}{e} \\ f(x)>0 \ si \ x\in\left]\dfrac{1}{e};+\infty\right[\\ f(x)<0 \ si \ x\in\left]0;\dfrac{1}{e}\right[\end{cases}.$$

2. Calculons la limite de la fonction f en 0 :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+}(1+\ln x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x)=0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$$ donc l'axe des ordonnées est asymptote verticale à (C).

3. La droite d'équation $y=0$ est asymptote à (C) en $+\infty$. Justifions notre réponse :

   On a : $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$ or $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)=0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

4. Calculons la dérivée de la fonction f et étudions son signe sur $]0;+\infty[$:

   On a : $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\times x-(1+\ln x)\times 1}{x^2}=-\dfrac{\ln x}{x^2}$ or $x^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-\ln x$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

   Conclusion :

$$\begin{cases} f(x)=0 \ si \ x=\dfrac{1}{e} \\ f(x)<0 \ si \ x\in]1;+\infty[\\ f(x)>0 \ si \ x\in]0;1[\end{cases}.$$

5. Dressons le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$:

On a :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Conclusion :

La fonction f est croissante sur $]0;1[$ et décroissante sur $]1;+\infty[$.

6. Calculons la primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1 :

   On a $f(x)=\frac{1}{x}\times(1+\ln x)$ donc si on pose $u(x)=1+\ln x$, on obtient $u'(x)=\frac{1}{x}$ soit

   $f(x)=u'(x)\times u(x)$ d'où $F(x)=\frac{u^2(x)}{2}+c=\frac{(1+\ln x)^2}{2}+c$. De plus

   $F(1)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}+c=0 \Leftrightarrow c=-\frac{1}{2}$ donc $F(x)=\frac{(1+\ln x)^2}{2}-\frac{1}{2}$.

Partie B

Une entreprise, qui fabrique des ustensiles de cuisine, sait qu'elle peut en produire jusqu'à 5 000 par jour et que son bénéfice, exprimé en milliers de francs, est donné par : $B(q)=10\times\frac{1+\ln q}{q}$ où q est le nombre d'unités produites en milliers.

Déduire de l'étude de la ***partie A*** :

1. Le nombre minimal d'unités (arrondi à 10^{-3}) à produire pour que l'entreprise atteigne le seuil de rentabilité (bénéfice positif) :

   On a $B(q)=10\times f(q)$ donc B est du signe de f et $\frac{1}{e}\simeq 0,368$ soit au moins 368 objets.

2. Le nombre exact d'unité à produire pour que l'entreprise obtienne un bénéfice maximum, ainsi que la valeur de ce bénéfice :
   D'après le tableau de variations de la fonction f, il faut produire 1 000 objets et ce bénéfice vaudra 10 000 euros.