

CORRECTION

EXERCICE n°32 :

PARTIE A :

La fonction h est définie sur l'intervalle $[0;8]$ par : $h(x) = x^2 + \frac{16x}{2x+1} - 8\ln(2x+1)$.

1. Montrons que : $h'(x) = \frac{2x(2x+5)(2x-3)}{(2x+1)^2}$:

On a :

$$h'(x) = 2x + 16 \times \left[\frac{1 \times (2x+1) - x \times 2}{(2x+1)^2} \right] - 8 \times \frac{2}{2x+1} = \frac{2x(2x+1)^2 + 16 - 16(2x+1)}{(2x+1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{2x(4x^2 + 4x + 1) - 32x}{(2x+1)^2} = \frac{8x^3 + 8x^2 - 30x}{(2x+1)^2}$$

De plus :

$$\frac{2x(2x+5)(2x-3)}{(2x+1)^2} = \frac{(4x^2 + 10x)(2x-3)}{(2x+1)^2} = \frac{8x^3 - 12x^2 + 20x^2 - 30x}{(2x+1)^2} = \frac{8x^3 + 8x^2 - 30x}{(2x+1)^2}$$

Donc :

$$h'(x) = \frac{2x(2x+5)(2x-3)}{(2x+1)^2}$$

2. Etudions les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0;8]$:

On a le tableau de signes suivant :

x	0	$\frac{3}{2}$	8
$2x$	0	+	+
$2x+5$		+	+
$2x-3$		-	0
$(2x+1)^2$		+	+
$h'(x)$	0	-	0

Conclusion :

$$\begin{cases} h'(x) = 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{2} \\ h'(x) > 0 & \text{si } x \in \left] \frac{3}{2}; 8 \right[\\ h'(x) < 0 & \text{si } x \in \left] 0; \frac{3}{2} \right[\end{cases} .$$

Tableau de variation de la fonction h :

x	0		$\frac{3}{2}$		8
$h'(x)$	0	-	0	+	
$h(x)$	0				$h(8)$

$$h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{33}{4} - 16\ln 2 \quad \text{et} \quad h(8) = \frac{1216}{17} - 8\ln 17.$$

Conclusion :

La fonction h est décroissante sur $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{3}{2}; 8\right]$.

3. Montrons que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\frac{3}{2}; 8\right]$:

Sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}; 8\right]$:

- La fonction h est continue ;
- La fonction h est strictement croissante ;
- $h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{25}{4} - 16\ln 2 < 0$ et $h(8) = \frac{1104}{17} - 8\ln 17 > 0$;

Donc l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\frac{3}{2}; 8\right]$.

On a :

$$2 < \alpha < 3$$

$$2,9 < \alpha < 3$$

$$2,92 < \alpha < 2,93$$

$$2,926 < \alpha < 2,927$$

Donc, à 10^{-2} près, $\alpha = 2,93$.

4. Déduisons des résultats précédents le signe de la fonction h sur l'intervalle $[0; 8]$:

On a :

$$\begin{cases} h(x) = 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = \alpha \\ h(x) > 0 & \text{si } x \in]\alpha; 8] \\ h(x) < 0 & \text{si } x \in [0; \alpha[\end{cases}$$

PARTIE B :

La fonction M est définie sur l'intervalle $[0; 8]$ par : $M(x) = x + \frac{8}{2x+1}$.

La fonction C_T est la primitive de la fonction M sur l'intervalle $[0;8]$ qui s'annule pour $x=0$.

Montrons que : $C_T(x) = \frac{x^2}{2} + 4\ln(2x+1)$:

On a :

$$C_T'(x) = x + 4 \times \frac{2}{2x+1} = x + \frac{8}{2x+1} = M(x) \text{ et } C_T(0) = 0.$$

PARTIE C :

Une entreprise produit une quantité variable x d'appareils (x est exprimé en milliers d'appareils) dont le coût marginal M est la fonction définie dans la partie B.

Dans la suite du problème, tous les coûts seront exprimés en milliers d'euros).

On modélise le coût total de production de x milliers d'appareils, pour x appartenant à l'intervalle

$\left[\frac{1}{4};8\right]$ par la fonction C_T définie dans la partie B.

1. Vérifions que le coût moyen, par milliers d'appareils, est défini sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4};8\right]$ par :

$$C_m(x) = \frac{x}{2} + \frac{4\ln(2x+1)}{x} :$$

On a :

$$C_m(x) = \frac{C_T(x)}{x} = \frac{\frac{x^2}{2} + 4\ln(2x+1)}{x} = \left[\frac{x^2}{2} + 4\ln(2x+1) \right] \times \frac{1}{x} = \frac{x}{2} + \frac{4\ln(2x+1)}{x}.$$

2. Calculons $C_m'(x)$ où C_m' désigne la fonction dérivée de la fonction C_m et vérifions que l'on a :

$$C_m'(x) = \frac{h(x)}{2x^2} \text{ où } h \text{ est la fonction étudiée dans la partie A :}$$

On a :

$$C_m'(x) = \frac{1}{2} + 4 \times \left[\frac{\frac{2}{2x+1} \times x - \ln(2x+1) \times 1}{x^2} \right] = \frac{1}{2} + \left[\frac{8x}{2x+1} - 4\ln(2x+1) \right] \times \frac{1}{x^2}$$

$$C_m'(x) = \frac{x^2 + 2 \left[\frac{8x}{2x+1} - 4\ln(2x+1) \right]}{2x^2} = \frac{x^2 + \frac{16x}{2x+1} - 8\ln(2x+1)}{2x^2} = \frac{h(x)}{2x^2}.$$

3. Etudions les variations de la fonction C_m et dressons son tableau de variation :

On a :

$$\begin{cases} C_m'(x) = 0 & \text{si } x = \alpha \\ C_m'(x) > 0 & \text{si } x \in]\alpha;8] \\ C_m'(x) < 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{4};\alpha\right[\end{cases} .$$

Tableau de variation :

x	$\frac{1}{4}$		α		8
$C'_m(x)$		-	0	+	
$C_m(x)$	$C_m\left(\frac{1}{4}\right)$	$C_m(\alpha)$		$C_m(8)$	

$$C_m\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} + 16 \ln\left(\frac{3}{2}\right) ; C_m(\alpha) = 4,09 \text{ et } C_m(8) = 4 + \frac{\ln 17}{2}.$$

Conclusion :

La fonction C_m est décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; \alpha\right]$ et croissante sur $[\alpha; 8]$

4. Le coût moyen est minimum pour la production de 2 930 objets.

www.maths-terminale-es.fr