CORRECTION

<u>EXERCICE n°31</u> :

Soit la fonction f définie par : $f(x)=x^2+\dfrac{50x}{x+1}-50\ln(x+1)-50$ sur $[0;50]$.

1. Calcul de $f'(x)$:

   On a :

$$f'(x)=2x+50\times\frac{1\times(x+1)-x\times1}{(x+1)^2}-50\times\frac{1}{x+1}=2x+\frac{50}{(x+1)^2}-\frac{50}{x+1}=\frac{2x(x+1)^2+50-50(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2+2x+1\right)-50x}{(x+1)^2}=\frac{2x^3+4x^2+2x-50x}{(x+1)^2}=\frac{2x^3+4x^2-48x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2+2x-24\right)}{(x+1)^2}=\frac{2x(x-4)(x+6)}{(x+1)^2}.$$

Sur $[0;50]$:

On a : $x\geq 0$ donc $x+6>0$ et $(x+1)^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(x-4)$.

D'où le tableau de variation suivant :

x	0		4		50
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-50	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	$f(50)$

$$f(4)=6-50\ln 5<0\ ;\ f(50)=\frac{127450}{51}-50\ln 51>0.$$

Conclusion :

La fonction f est décroissante sur $[0;4]$ et croissante sur $[4;50]$.

Sur l'intervalle $[0;4]$:

- La fonction f est continue ;
- La fonction f est décroissante ;
- $f(0)<0$;

Conclusion :

L'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $[0;4]$.

Sur l'intervalle $[4;50]$:

- La fonction f est continue ;

- La fonction f est croissante ;
- $f(4)<0$ et $f(50)>0$;

Conclusion :

L'équation $f(x)=0$ admet une solution unique a sur l'intervalle $[4;50]$.

Conclusion :

L'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0;50]$.

A l'aide de la calculatrice, on a :

$11<\alpha<12$

$11,3<\alpha<11,4$ donc $\alpha=11,4$ à $0,1$ près.

$11,39<\alpha<11,4$

Signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0;50]$:

$$\begin{cases} f(x)=0 & si \quad x=0 \quad ou \quad x=\alpha \\ f(x)<0 & si \quad x\in\left]0;\alpha\right[\\ f(x)>0 & si \quad x\in\left]\alpha;50\right] \end{cases}.$$

2. Par définition, la fonction coût marginal est définie par : $C_m(x)=C_T'(x)$ donc :

$$C_T(x)=x^2+50\ln(x+1)+c.$$

Or $C_T(0)=50 \Leftrightarrow c=50$ soit $C_T(x)=x^2+50\ln(x+1)+50$.

La fonction coût moyen est donnée par :

$$C_M(x)=\frac{x^2+50\ln(x+1)+50}{x}.$$

On a :

$$C_M'(x)=\frac{C_T'(x)\times x-C_T(x)\times 1}{x^2}=\frac{1}{x^2}f(x).$$

3. Tableau de variation de la fonction coût moyen :

x	0		α		50
$C_M'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$C_M(x)$	||	$\searrow$	$C_M(\alpha)$	$\nearrow$	$C_M(50)$

Conclusion :

La fonction C_M est décroissante sur $]0;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;50]$.

Le coût moyen est minimal pour α kg soit pour 11,4 kg et ce coût moyen est de 26 € 83 par kg et $C_m(11,4) = C_M(11,4) = 26,83$ et le coût total est : $C_T(11,4) = 305,84$.