CORRECTION

EXERCICE n°30 :

Partie A :

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{9x}{x+1}-9\ln(x+1)$ sur $[0;5]$.

1. Calcul de $f'(x)$:

   On a :

$$f'(x)=x+9\times\frac{1\times(x+1)-x\times1}{(x+1)^2}-9\times\frac{1}{x+1}=x+9\times\frac{1}{(x+1)^2}-9\times\frac{1}{x+1}=\frac{x(x+1)^2+9-9(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x(x^2+2x+1)-9x}{(x+1)^2}=\frac{x^3+2x^2+x-9x}{(x+1)^2}=\frac{x^3+2x^2-8x}{(x+1)^2}=\frac{x(x^2+2x-8)}{(x+1)^2}=\frac{x(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}.$$

2. Sur $[0;5]$:

   On a : $x\geq 0$ donc $x+4>0$ et $(x+1)^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(x-2)$.

   D'où le tableau de variation suivant :

x	0		2		5
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(5)$

$f(2)=8-9\ln 3<0$; $f(5)=20-9\ln 6>0$.

Conclusion :

La fonction f est décroissante sur $[0;2]$ et croissante sur $[2;5]$.

3. Sur l'intervalle $]0;2]$:

   - La fonction f est continue ;
   - La fonction f est décroissante ;
   - $f(0)=0$ et $f(2)<0$;

   Conclusion :

   L'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]0;2]$.

   Sur l'intervalle $[2;5]$:

   - La fonction f est continue ;
   - La fonction f est croissante ;

www.maths-terminale-es.fr

- $f(2)<0$ et $f(5)>0$;

Conclusion :

L'équation $f(x)=0$ admet une solution unique a sur l'intervalle $[2;5]$.

Conclusion :

L'équation $f(x)=0$ admet une solution unique a sur l'intervalle $]0;5]$.

4. A l'aide de la calculatrice, on a :

$$3<a<4$$
$$3,6<a<3,7$$
$$3,69<a<3,7$$
$$3,699<a<3,7.$$

5. Signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0;5]$:

$$\begin{cases} f(x)=0 & si \quad x=0 \quad ou \quad x=a \\ f(x)<0 & si \quad x\in\,]0;a[\\ f(x)>0 & si \quad x\in\,]a;5] \end{cases}.$$

www.maths-terminale-es.fr

Partie B :

La fonction coût moyen est définie sur $]0;5]$ par : $C_M(x)=\dfrac{C_T(x)}{x}=\dfrac{x}{4}+\dfrac{9}{2}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

1. On a :

$$C_M{}'(x)=\frac{C_T'(x)\times x-C_T(x)\times 1}{x^2}=\frac{\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{9}{2}\times\dfrac{1}{x+1}\right)\times x-\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{9}{2}\ln(x+1)\right)}{x^2}.$$

$$C_M{}'(x)=\frac{1}{2x^2}\left[\frac{x^2}{2}+\frac{9x}{x+1}-9\ln(x+1)\right]=\frac{1}{2x^2}f(x).$$

2. Tableau de variation de la fonction coût moyen :

x	0		a		5
$C_M{}'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$C_M(x)$	‖	$\searrow$	$C_M(a)$	$\nearrow$	$C_M(5)$

Conclusion :

La fonction C_M est décroissante sur $]0;a]$ et croissante sur $[a;15]$.

3. Le coût moyen est minimal pour a milliers d'objets soit entre 3 699 et 3 700 tonnes et ce coût moyen est de 2 807,17 euros par tonnes.

www.maths-terminale-es.fr