CORRECTION

<u>EXERCICE n°29</u> :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = -x + 4 + \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ sur $]1;+\infty[$.

1. Limite en 1 :

- $\lim\limits_{x\to1^+}(x+1) = 2$ et $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1) = 0^+$ alors $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = +\infty$.

  De plus : $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$.

  Donc : $\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = +\infty$.

- $\lim\limits_{x\to1^+}(-x+4) = 3$.
- Conclusion :

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty.$$

Limite en $+\infty$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{X\to1} \ln X = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+4) = -\infty$.
- Conclusion :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

2. On a :

$$f'(x) = -1 + \frac{\dfrac{1\times(x-1)-(x+1)\times1}{(x-1)^2}}{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)} = -1 + \frac{1\times(x-1)-(x+1)\times1}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{-(x-1)(x+1)-2}{(x-1)(x+1)} = -\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}.$$

x	1		$+\infty$
x^2+1		$+$	
$x+1$		$+$	
$x-1$	0	$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	

Conclusion : $f'(x) < 0$ si $x > 1$.

Tableau de variation de la fonction f :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ $-$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$ $\searrow$	$-\infty$

Conclusion : la fonction f est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x+4)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=0$ donc la droite d'équation $y=-x+4$ est asymptote oblique à la courbe (C) en $+\infty$.

$\dfrac{x+1}{x-1}-1=\dfrac{2}{x-1}>0$ sur $]1;+\infty[$ donc : $\dfrac{x+1}{x-1}>1$ si $x>1$.

On a : $f(x)-(-x+4)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ or si $x>1$: $\dfrac{x+1}{x-1}>1$ donc comme la fonction logarithme est croissante, il résulte que :

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)>\ln 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)>0$$

Soit : $f(x)-(-x+4)>0$ sur $]1;+\infty[$.

Conclusion :

La courbe (C) est au-dessus de la droite (D).

4. On résout l'équation :

$$f'(x)=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow -\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}-\frac{5}{3}=0\Leftrightarrow \frac{3\left(x^2+1\right)-5(x-1)(x+1)}{3(x-1)(x+1)}=0$$

$$f'(x)=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow \frac{3\left(x^2+1\right)-5\left(x^2-1\right)}{3(x-1)(x+1)}=0\Leftrightarrow \frac{8-2x^2}{3(x-1)(x+1)}=0\Leftrightarrow -\frac{2\left(4-x^2\right)}{3(x-1)(x+1)}=0.$$

D'où : $x=2$.

Conclusion :

Les coordonnés du point A sont $A\left(2;f(2)\right)$ soit $A\left(2;2+\ln 3\right)$.

5. Sur $[4;5]$:

- La fonction f est continue ;
- La fonction f est décroissante ;
- $f(4)>0$ et $f(5)<0$;

Alors l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in[4;5]$.

A l'aide de la calculatrice, on a :

$4 < \alpha < 5$

$4,4 < \alpha < 4,5$

$4,45 < \alpha < 4,46$

$4,456 < \alpha < 4,457$

Alors : $\alpha = 4,46$ à 10^{-2}.

6. Représentation graphique :