

# CORRECTION

## EXERCICE n°27 :

### Partie A :

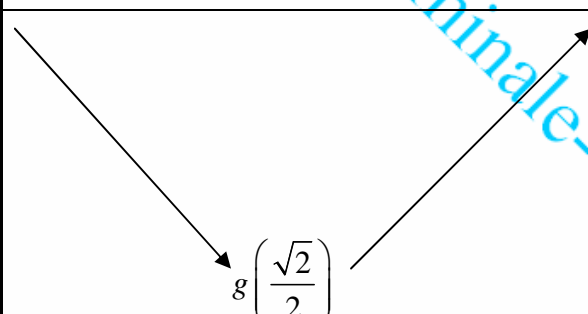
Soit la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$ .

1. On a :  $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$  donc :

$$\begin{cases} g'(x) = 0 & \text{si } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ g'(x) > 0 & \text{si } x \in \left] \frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty \right[ \\ g'(x) < 0 & \text{si } x \in \left] 0; \frac{\sqrt{2}}{2} \right[ \end{cases}$$

2. Tableau de variation de la fonction  $g$  :

$x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$			



$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3 + \ln 2}{2}$$

La fonction  $g$  est décroissante sur  $\left] 0; \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$  et croissante sur  $\left] \frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty \right[$ .

La fonction  $g$  admet  $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3 + \ln 2}{2} > 0$  comme minimum donc :  $g(x) > 0$  sur  $]0; +\infty[$ .

### Partie B :

Soit la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x}$ .

1. Limite de  $f$  en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe (C)

Limite de  $f$  en  $+\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{1}{2} \right) = +\infty$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

2. On a :

$$f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - \ln x + 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

Il résulte que  $f'(x)$  a le même signe que  $g(x)$  donc  $f'(x) > 0$  c'est à dire : la fonction  $f$  est croissante sur  $]0; +\infty[$ .

3. Sur l'intervalle  $[2; 3]$  :

- La fonction  $f$  est continue ;
- La fonction  $f$  est croissante ;
- $f(2) < 3$  et  $f(3) > 3$  ;

Conclusion :

L'équation  $f(x) = 3$  admet une solution unique  $x_0 \in [2; 3]$ .

On a :

$$2 < x_0 < 3$$

$$2,1 < x_0 < 2,2$$

$$2,14 < x_0 < 2,15.$$

4. On résout l'équation :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Donc les coordonnées du point  $A$  sont :  $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - \left( x + \frac{1}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  donc la droite d'équation  $y = x + \frac{1}{2}$  est asymptote oblique à la courbe (C) en  $+\infty$ .

$f(x) - \left( x + \frac{1}{2} \right) > 0$  si  $x > 1$  : la courbe (C) est au-dessus de la droite (D).

$f(x) - \left( x + \frac{1}{2} \right) < 0$  si  $0 < x < 1$  : la courbe (C) est en-dessous de la droite (D).

Une équation de la tangente  $(T)$  au point  $A$  est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$y = 2(x-1) + \frac{3}{2}$$

$$y = 2x - \frac{1}{2}$$

5. Représentation graphique :

