CORRECTION

<u>EXERCICE n°27</u> :

Partie A :

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^2+1-\ln x$.

1. On a : $g'(x)=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-1}{x}$ donc :

$$\begin{cases} g'(x)=0 \ \ si \ \ x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ g'(x)>0 \ \ si \ \ x\in \left]\dfrac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[\\ g'(x)<0 \ \ si \ \ x\in \left]0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[\end{cases}.$$

2. Tableau de variation de la fonction g :

x	0		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	||	$\searrow$	$g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\nearrow$	

$g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3+\ln 2}{2}$.

La fonction g est décroissante sur $\left]0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et croissante sur $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$.

La fonction g admet $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3+\ln 2}{2}>0$ comme minimum donc : $g(x)>0$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\ln x}{x}$.

1. Limite de f en 0 :

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty \text{ donc } \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

Alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe (C)

Limite de f en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{2}\right)=+\infty$$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2. On a :

$$f'(x)=1+\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\frac{x^2-\ln x+1}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}.$$

Il résulte que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ donc $f'(x)>0$ c'est à dire : la fonction f est croissante sur $]0;+\infty[$.

3. Sur l'intervalle $[2;3]$:
   - La fonction f est continue ;
   - La fonction f est croissante ;
   - $f(2)<3$ et $f(3)>3$;

Conclusion :

L'équation $f(x)=3$ admet une solution unique $x_0\in[2;3]$.

On a :

$2<x_0<3$

$2{,}1<x_0<2{,}2$

$2{,}14<x_0<2{,}15$.

4. On résout l'équation :

$$f(x)=x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}=0\Leftrightarrow x=1$$

Donc les coordonnées du point A sont : $A\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ donc la droite d'équation $y=x+\frac{1}{2}$ est asymptote oblique à la courbe (C) en $+\infty$.

$f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)>0$ si $x>1$: la courbe (C) est au-dessus de la droite (D).

$f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)<0$ si $0<x<1$: la courbe (C) est en-dessous de la droite (D).

Une équation de la tangente (T) au point A est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$y = 2(x-1) + \frac{3}{2}$$

$$y = 2x - \frac{1}{2}.$$

5. Représentation graphique :