CORRECTION

EXERCICE n°26 :

1. Soit la fonction g définie sur $]1;+\infty[$ par : $g(x)=ax+\dfrac{b}{\ln x}$.

   La courbe (Γ) coupe l'axe des abscisses au point E d'abscisse e alors : $g(e)=0$.

   La tangente à la courbe (Γ) en E est parallèle à la droite d'équation $y=2x$ alors : $g'(e)=2$.

   Or $g'(x)=a+\dfrac{b\times\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=a-\dfrac{b}{x(\ln x)^2}$ donc on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} g(e)=0 \\ g'(e)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ea+b=0 \\ a-\dfrac{b}{e}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ea+b=0 \\ ea-b=2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-e \end{cases}.$$

   D'où : $g(x)=x-\dfrac{e}{\ln x}$.

2. Soit la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=x-\dfrac{e}{\ln x}$.

   a. Limite de f en 1 :

$$\lim_{x\to1^+}\ln x=0^+ \text{ donc } \lim_{x\to1^+}\left(-\frac{e}{\ln x}\right)=+\infty \text{ soit } \lim_{x\to1^+}f(x)=-\infty.$$

   La droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à la courbe (C).

   Limite de f en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \text{ donc } \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{e}{\ln x}\right)=0 \text{ soit } \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

   b. On pose : $f(x)=u(x)+v(x)$ avec $u(x)=x$ et $v(x)=-\dfrac{e}{\ln x}$.

   Or la fonction v est la composée de deux fonctions de même sens de variation donc la fonction v est croissante sur $]1;+\infty[$.

   De plus, la fonction f est la somme de deux fonctions croissantes donc la fonction f est croissante sur $]1;+\infty[$.

   Tableau de variation de la fonction f :

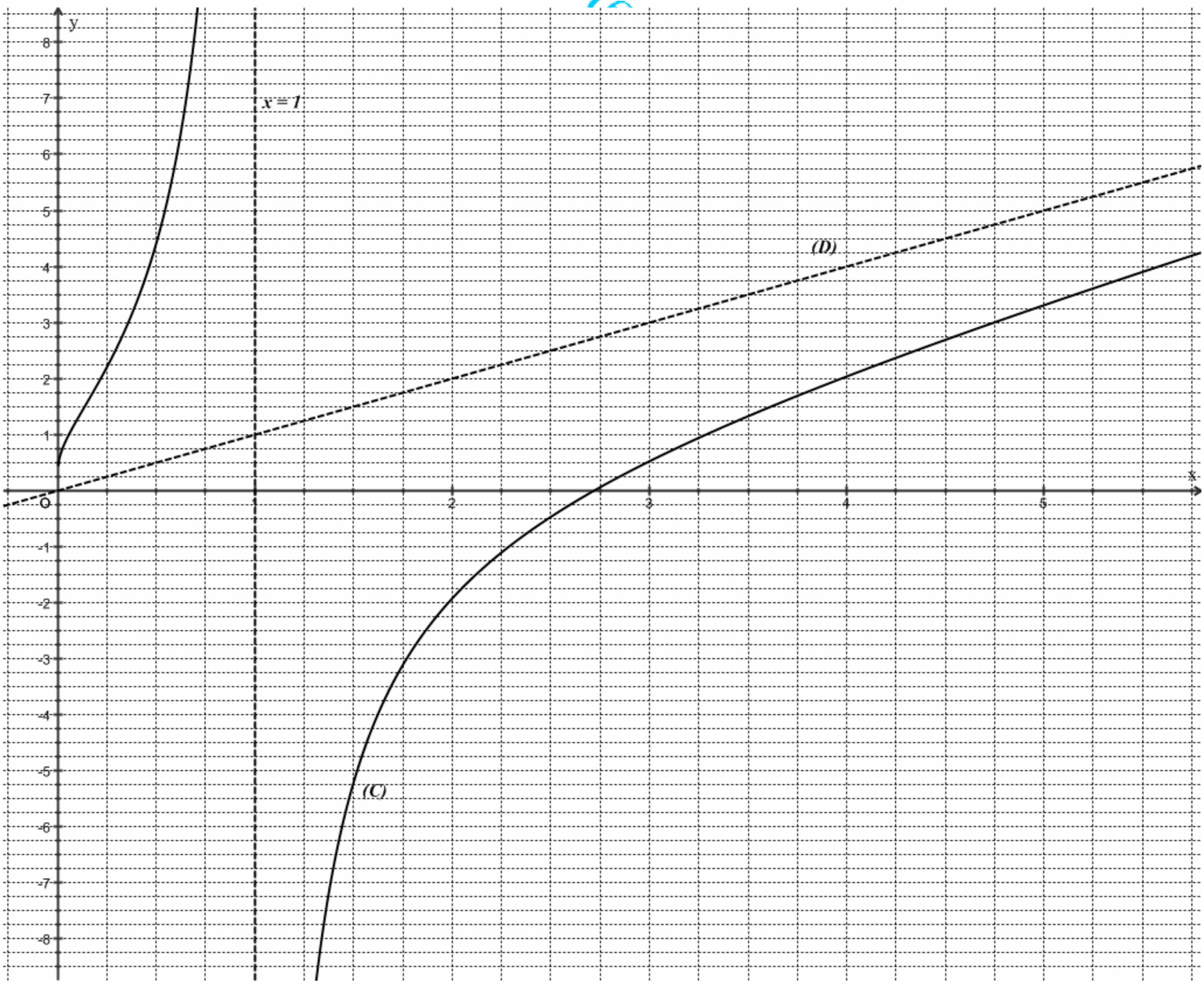
x	1	e	$+\infty$
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

c. On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{e}{\ln x}\right)=0$$ donc la droite (D) d'équation $y=x$ est asymptote oblique à la courbe (C) en $+\infty$.

De plus : $f(x)-x<0$ car $\ln x<0$ si $x>1$ donc la droite (D) est au-dessus de la courbe (C).

d. Représentation graphique de la fonction f :



3. On a : $f(x)=0$ si $x=e$.

D'où le tableau suivant :

x	1		e		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$\lvert f(x)\rvert$	‖	$-f(x)$	0	$f(x)$	

La représentation graphique de la fonction $|f|$ coïncide avec la courbe (C) sur $[e;+\infty[$ et est le symétrique de (C) par rapport à l'axe des abscisses sur $]1;e]$.

Représentation graphique de f et $|f|$: