CORRECTION

EXERCICE n°20 :

1. Soit la fonction g définie par :

$$g(x)=\frac{a\ln x+b}{x} \text{ sur }]0;+\infty[.$$

La courbe (Γ) passe par le point $A\left(e;\frac{3}{e}\right)$ alors $g(e)=\frac{3}{e}$.

La courbe (Γ) admet une tangente au point d'abscisse 1 parallèle à la droite d'équation $y=-x$ alors $g'(1)=-1$.

Or : $g'(x)=\dfrac{\frac{a}{x}\times x-(a\ln x+b)}{x^2}=\dfrac{-a\ln x+a-b}{x^2}$.

On résout alors le système suivant :

$$\begin{cases} g(e)=\frac{3}{e} \\ g'(1)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{e}=\frac{3}{e} \\ a-b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ a-b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}.$$

D'où : $g(x)=\dfrac{\ln x+2}{x}$.

2. Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{\ln x+2}{x} \text{ sur }]0;+\infty[.$$

   a. On résout l'équation $f(x)=0$:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\ln x+2}{x}=0 \Leftrightarrow \ln x+2=0 \Leftrightarrow \ln x=-2 \Leftrightarrow \ln x=-2\times 1 \Leftrightarrow \ln x=-2\ln e$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=\ln\left(e^{-2}\right) \Leftrightarrow \ln x=\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) \Leftrightarrow x=\frac{1}{e^2}.$$

   Donc la courbe (C) coupe l'axe des abscisses au point $\left(\frac{1}{e^2};0\right)$.

   b. Limite de la fonction f en 0 :

   $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x+2)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}(x)=0^+$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$: la droite d'équation $x=0$ (axe des ordonnées) est asymptote à la courbe (C).

   Limite de la fonction f en $+\infty$:

$$f(x)=\frac{\ln x+2}{x}=\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}.$$

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$: la droite d'équation $y=0$ (axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe (C) en $+\infty$.

   c. Etude des variations de la fonction f :

   De la question 1., on obtient avec $a=1$ et $b=2$:

$$f'(x)=\frac{-\ln x-1}{x^2}=-\frac{\ln x+1}{x^2}.$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -(\ln x + 1) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow \ln x < -\ln e \Leftrightarrow \ln x < \ln\left(e^{-1}\right)$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln\left(\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow x < \frac{1}{e}.$

Tableau de variation de la fonction f :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Conclusion :

La fonction f est croissante sur $\left]0;\frac{1}{e}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$.

d. De la question 1., $f'(1) = -1$.

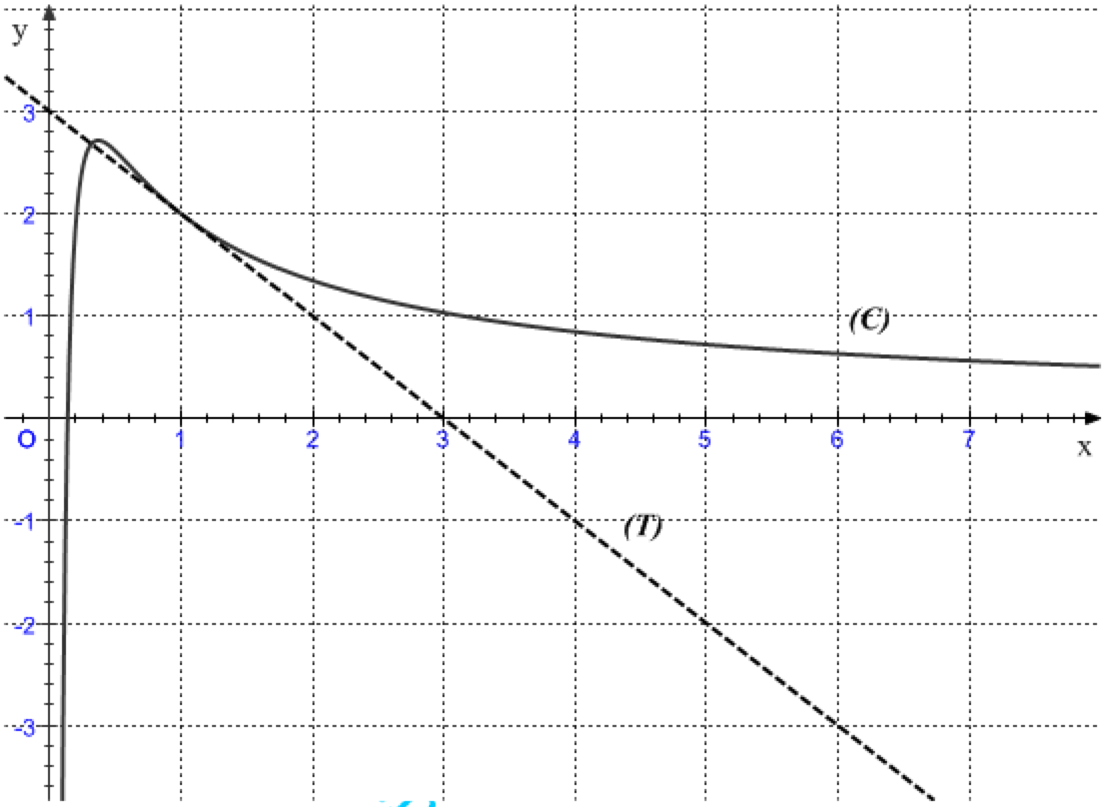
Une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est :

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = -(x-1) + 2$

$y = -x + 3.$

e. Représentation graphique :



y
3
2
1
O
1
2
3
4
5
6
7
x
-1
-2
-3
(C)
(T)