CORRECTION

EXERCICE n°19 :

1. $f(x)=0 \Leftrightarrow -(\ln x)^2+\ln x+2=0$:

    Cette équation est définie si $x>0$ soit sur $]0;+\infty[$.

    On pose : $X=\ln x$ alors :

    $$-X^2+X+2=0 \Leftrightarrow X=-1 \quad ou \quad X=2.$$

    Soit alors :

    $$\ln x=-1 \Leftrightarrow \ln x=-\ln e \Leftrightarrow \ln x=\ln\left(\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}.$$

    $$\ln x=2 \Leftrightarrow \ln x=2\ln e \Leftrightarrow \ln x=\ln\left(e^2\right) \Leftrightarrow x=e^2.$$

    Donc : $S=\left\{\frac{1}{e};e^2\right\}$.

    Les solutions de cette équation représentent les abscisses des points d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses soit : $A\left(\frac{1}{e};0\right)$ et $B\left(e^2;0\right)$.

2. On écrit : $f(x)=\ln x\left(-\ln x+1+\frac{2}{\ln x}\right)$.

    On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

    On a : $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$.

    La droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à la courbe (C).

3. On a :

    $$f'(x)=-2\times\frac{1}{x}\times\ln x+\frac{1}{x}=\frac{1-2\ln x}{x}.$$

    De plus :

    $$1-2\ln x\geq 0 \Leftrightarrow 2\ln x\leq 1 \Leftrightarrow \ln\left(x^2\right)\leq \ln e \Leftrightarrow x^2\leq e \Leftrightarrow x^2-e\leq 0$$

    $$1-2\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \left(x+\sqrt{e}\right)\left(x-\sqrt{e}\right)\leq 0 \Leftrightarrow x\in \left]0;\sqrt{e}\right].$$

    D'où :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f\left(\sqrt{e}\right)$	↘	$-\infty$

$$f\left(\sqrt{e}\right)=\frac{9}{4}.$$

Conclusion :

La fonction f est croissante sur $\left]0;\sqrt{e}\right]$ et décroissante sur $\left[\sqrt{e};+\infty\right[$.

4. Représentation graphique de la fonction f :