CORRECTION

EXERCICE n°5 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par :

$$f(x)=\frac{x^2-x+4}{1-x}.$$

On appelle (C) la courbe représentant la fonction f dans un repère orthonormal d'unité 1 cm en abscisse et en ordonnée.

1. Etudions les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition :

   Limites en l'infini :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+4}{1-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}(-x)=-\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+4}{1-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty.$$

   Limites en 1 :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(x^2-x+4\right)=4\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}(1-x)=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=+\infty \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(x^2-x+4\right)=4\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(1-x)=0^-\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=-\infty$$

   La droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à la courbe (C).

2. Soit (D) la droite d'équation $y=-x$.

   Montrons que (D) est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$ et $+\infty$ et étudions la position relative de (C) et (D) sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$:

   On a : $f(x)-(-x)=\dfrac{x^2-x+4}{1-x}+x=\dfrac{x^2-x+4+x(1-x)}{1-x}=\dfrac{4}{1-x}$.

   Alors :

   $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(-x)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{4}{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{4}{-x}\right)=0$ d'où (D) asymptote à la courbe (C) en $-\infty$ et $+\infty$.

   De plus :

$$f(x)-(-x)=\frac{4}{1-x}>0 \text{ si } x<1 \text{ et } f(x)-(-x)=\frac{4}{1-x}<0 \text{ si } x>1.$$

   Conclusion :

   si $x<1$: la courbe (C) est au-dessus de la droite (D).

   si $x>1$: la courbe (C) est en-dessous de la droite (D).

3. Calculons $f'(x)$ et étudions son signe sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$:

   On a :

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(1-x)-\left(x^2-x+4\right)\times(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2x-2x^2-1+x+x^2-x+4}{(1-x)^2}=\frac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2}.$$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$(1-x)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

4. Dressons le tableau de variations complets de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$+\infty$				$+\infty \Vert$		-5		
			3		$\Vert -\infty$				$-\infty$

5. Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse -1 :
   D'après le tableau de variations la tangente est horizontale et son équation est : $y=3$
6. Résoudre, par le calcul, l'équation $f(x)=0$ sur $]-\infty;1[$:

   $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-x+4=0$: pas de solution.

   Cela signifie que la courbe (C) ne coupe pas l'axe des abscisses.