CORRECTION

EXERCICE n°3 :

Soit la fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par : $f(x)=x-6+\dfrac{x-1}{x^2-4}$. On appelle ($C$) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. Montrons que la droite (D) d'équation $y=x-6$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$:

   On a :

   $$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-6)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0.$$

2. Etudions la position de la courbe (C) et de la droite (D) :

   On étudie le signe de $f(x)-(x-6)=\dfrac{x-1}{x^2-4}$:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-(x-6)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

   Conclusion :

   Sur $]2;+\infty[$, la courbe (C) est au-dessus de la droite (D).

3. Déterminons les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-}(x-6)=-4\\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-}(x-1)=1\\ \lim\limits_{x\to2^-}(x^2-4)=0^-\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{x-1}{x^2-4}\right)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to2^-}f(x)=-\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-}(x-6)=-8\\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-}(x-1)=-3\\ \lim\limits_{x\to-2^-}(x^2-4)=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-2^-}\left(\dfrac{x-1}{x^2-4}\right)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to-2^-}f(x)=-\infty.$$