CORRECTION

EXERCICE n°1 :

PARTIE A :

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-20+\dfrac{400}{x}$.

On appelle (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

On prendra : en abscisses : 1 cm pour 10 unités.
en ordonnées : 1 cm pour 10 unités.

1. Déterminons les limites de la fonction f en 0 et $+\infty$:
   On a :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}(x-20)=-20\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{400}{x}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}(x-20)=\lim\limits_{x\to +\infty}(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{400}{x}\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty.$$

2. Etudions les variations de la fonction f :
   On a : $f'(x)=1-\dfrac{400}{x^2}=\dfrac{x^2-400}{x^2}=\dfrac{(x-20)(x+20)}{x^2}$ d'où le tableau de signes suivant :

x	0		20		$+\infty$
$x-20$		$-$	0	$+$	
$x+20$		$+$		$+$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Conclusion :

$$\begin{cases} f'(x)=0 \ \ si \ \ x=20\\ f'(x)>0 \ \ si \ \ x\in\ ]20;+\infty[\\ f'(x)<0 \ \ si \ \ x\in\ ]0;20[\end{cases}.$$

x	0		20		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	20	$\nearrow$	$+\infty$

Conclusion :

La fonction f est croissante sur $[20;+\infty[$ et décroissante sur $]0;20]$.

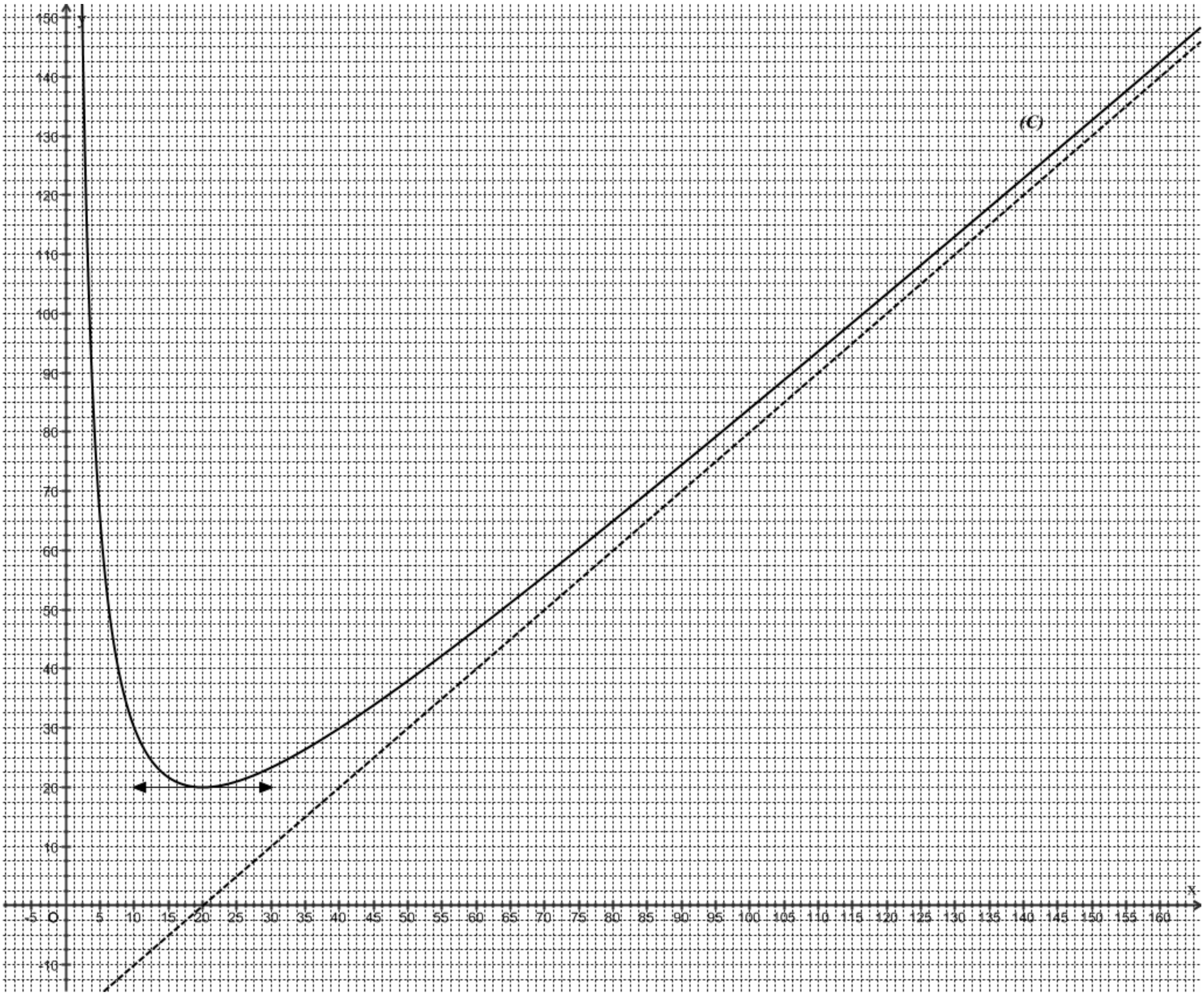
3. Montrons que la droite (D) d'équation $y=x-20$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$:
   On a :

$$\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)-(x-20)\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{400}{x}\right)=0.$$

4. Complétons le tableau de valeurs suivant :

x	5	10	20	40	50	100	160
$f(x)$	65	30	20	30	38	84	142,5

5. Traçons, sur le même graphique, la courbe (C) et la droite (D) :



PARTIE B :

Une entreprise fabrique pendant un intervalle de temps donné une quantité x d'un certain objet.
Les charges de cette entreprise pour fabriquer x objets sont donnés en francs par : $C(x) = x^2 - 20x + 400$.

1. Les charges moyennes unitaires, notées $C_M(x)$, sont définies par : $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$.

   Déterminons, en utilisant la première partie, la quantité d'objets à fabriquer pour avoir des charges moyennes unitaires minimum :
   On a :
   $$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^2 - 20x + 400}{x} = x - 20 + \frac{400}{x} = f(x).$$
   Conclusion :
   Il faut fabriquer 20 objets pour avoir des charges moyennes unitaires.
2. Un objet est vendu 100 francs.

a. Déterminons le bénéfice $B(x)$ de cette entreprise en fonction de x :

On a :

$$B(x)=100x-C(x)=100x-\left(x^2-20x+400\right)=-x^2+120x-400.$$

b. Déterminons x pour que le bénéfice soit maximum :

On a : $B'(x)=-2x+120$ d'où le tableau suivant :

x	0		60		$+\infty$
$B'(x)$		+	0	−	
$B(x)$		$\nearrow$	3 200	$\searrow$	
	−400				

Conclusion :

Il faut fabriquer 60 objets pour avoir un bénéfice maximum.