

EXERCICE n°3 :

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé :

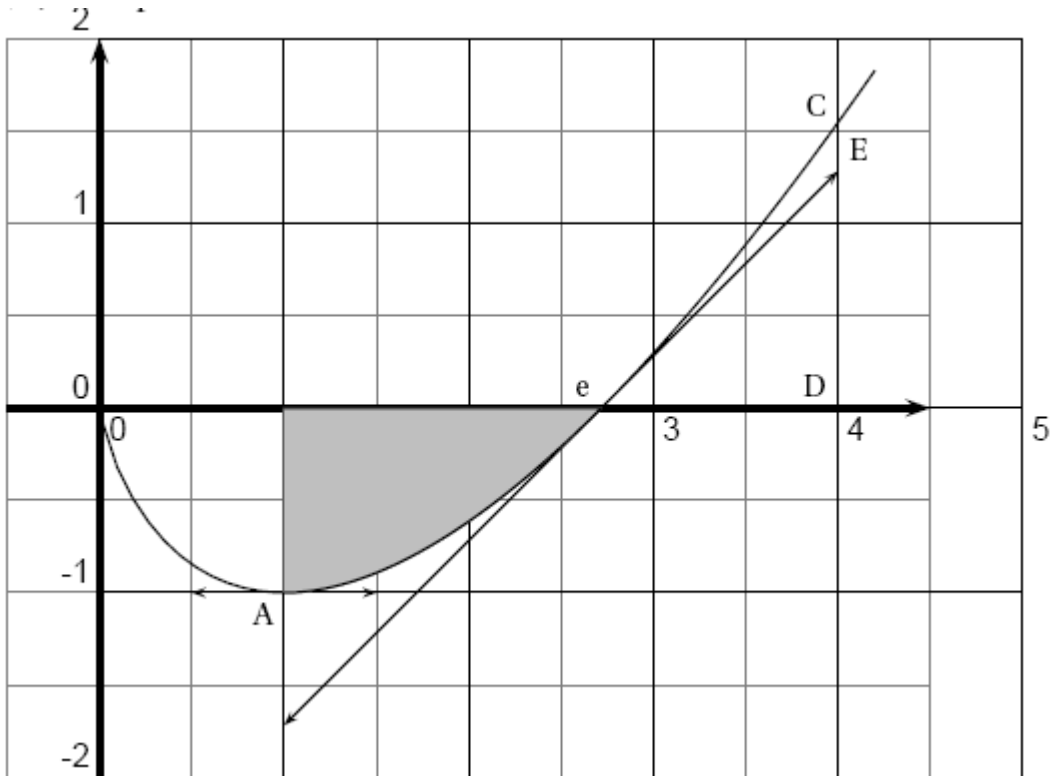
- la courbe (C_f) représentant une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$;
- deux tangentes à cette courbe : celle au point A d'abscisse 1 et celle du point B d'abscisse e .

La courbe (C_f) passe par le point $A(1; -1)$, $B(e; 0)$ et $C(4; f(4))$.

La tangente en A est parallèle à l'axe des abscisses.

La tangente en B passe par le point E tel que $BD = DE$, où D est le point de coordonnées $(4; 0)$ et E a pour abscisse 4.

Le nombre e est la base des logarithmes népériens.



1. Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :
 - a. Sans justifier, donner $f'(1)$ et $f'(e)$.
 - b. Sans justifier, donner les solutions dans $]0; 4]$ de l'inéquation $f(x) < 0$ puis celles de $f'(x) < 0$.
 - c. Soit \mathcal{A} , en unités d'aire, une estimation de l'aire de la région colorée, région comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
Parmi les trois nombres suivants : 2,9 ; 1,1 ; 0,6 lequel est la meilleure valeur approchée de \mathcal{A} ?
Justifiez la réponse.
2. On suppose que la fonction f précédente est définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x \ln x - x$.
 - a. Calculer $f'(x)$. En déduire les variations de f et les valeurs de $f'(1)$ et de $f'(e)$. (On ne demande pas les limites en 0 et $+\infty$)
 - b. Montrer que la fonction F définie sur $]0; 4]$ par $F(x) = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{3}{2} \right)$ est une primitive de f sur $]0; 4]$.
 - c. En déduire la valeur exacte de \mathcal{A} , en unités d'aire.