CORRECTION

EXERCICE n°7 :

Soit la fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{8x-2x^2}{(x-2)^2}$.

a. On a :

$$f(x)=\frac{8x-2x^2}{(x-2)^2}=\frac{2x(4-x)}{(x-2)^2}.$$

D'où le tableau de signes suivant :

x	2		4		$+\infty$
$2x$		$+$		$+$	
$4-x$		$+$	0	$-$	
$(x-2)^2$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Conclusion :

$$f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\,]2;4].$$

b. On a :

$$f(x)=a+\frac{b}{(x-2)^2}=\frac{a(x-2)^2+b}{(x-2)^2}=\frac{a(x^2-4x+4)+b}{(x-2)^2}=\frac{ax^2-4ax+(4a+b)}{(x-2)^2}.$$

Donc par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a=-2 \\ -4a=8 \\ 4a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=8 \end{cases} \text{ donc } f(x)=-2+\frac{8}{(x-2)^2}$$

c. Déterminons la primitive F de la fonction f sur $]2;+\infty[$ telle que $F(3)=1$:

On a :

$$f(x)=-2+\frac{8}{(x-2)^2}.$$

On pose $u(x)=x-2$ donc $u'(x)=1$

Alors :

$$f(x)=-2+\frac{8}{u(x)^2}=-2+8\times\frac{u'(x)}{u(x)^2}.$$

D'où :

$$F(x)=-2x+8\times\left[-\frac{1}{u(x)}\right]=-2x+8\times\left[-\frac{1}{(x-2)}\right]=-2x-\frac{8}{x-2}+c.$$

De plus :

$$F(3)=1\Leftrightarrow -2\times 3-\frac{8}{3-2}+c=1\Leftrightarrow c=15.$$

Conclusion :

$$F(x)=-2x-\frac{8}{x-2}+15.$$