CORRECTION

EXERCICE n°5 :

1. La fonction f représentée, graphique 1, par la courbe (C) est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=(ax+b)\ln x$ où a et b sont deux constantes que l'on calculera dans la suite de cette question. Sur le graphique 1 sont placés les points $A(1;0)$, $B(2;0)$ et $E(0;-1)$. Les points A et B appartiennent à la courbe (C), la droite (AE) est tangente à la courbe (C) en A.

   a. Par lecture graphique $f(2)=0$ et $f'(1)=1$.

   b. Déduisons a et b :

   $$f'(x)=a\times\ln x+(ax+b)\times\frac{1}{x}=a\ln x+\frac{b}{x}+a.$$

   On a le système suivant :

   $$\begin{cases} f(2)=0 \\ f'(1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2a+b)\ln 2=0 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=0 \\ -a-b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}.$$

2. Soit G une primitive de la fonction f représentée par la courbe (C) du graphique 1.
   Parmi les trois courbes (C_1), (C_2), (C_3) proposées sur le graphique 2, la seule qui peut représenter G est la courbe (C_3) car $G'=f$.

3. On admet à partir de maintenant que f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=2\ln x-x\ln x$.

   Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\ln x-2x+\frac{1}{4}x^2+\frac{15}{4}$.

   a. Démontrons que la fonction F est la primitive de f qui prend la valeur 2 en 1 :
   On a :

   $$F'(x)=(2-x)\ln x+\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\times\frac{1}{x}-2+\frac{1}{2}x=(2-x)\ln x=f(x) \text{ et } F(1)=2.$$

   b. Calculons $\int_1^2 f(x)\,dx$ et donnons une interprétation géométrique de cette intégrale :

   On a :

   $$\int_1^2 f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_1^2=F(2)-F(1)=2\ln 2-\frac{5}{4} \text{ avec } F(1)=2 \text{ et } F(2)=2\ln 2+\frac{3}{4}.$$

   Sur $[1;2]$, $f(x)\geq 0$ donc $\int_1^2 f(x)\,dx=2\ln 2-\frac{5}{4}$ représente l'aire du domaine du plan limité par la courbe (C) et l'axe des abscisses en unité d'aire.