CORRECTION

EXERCICE n°3 :

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé :

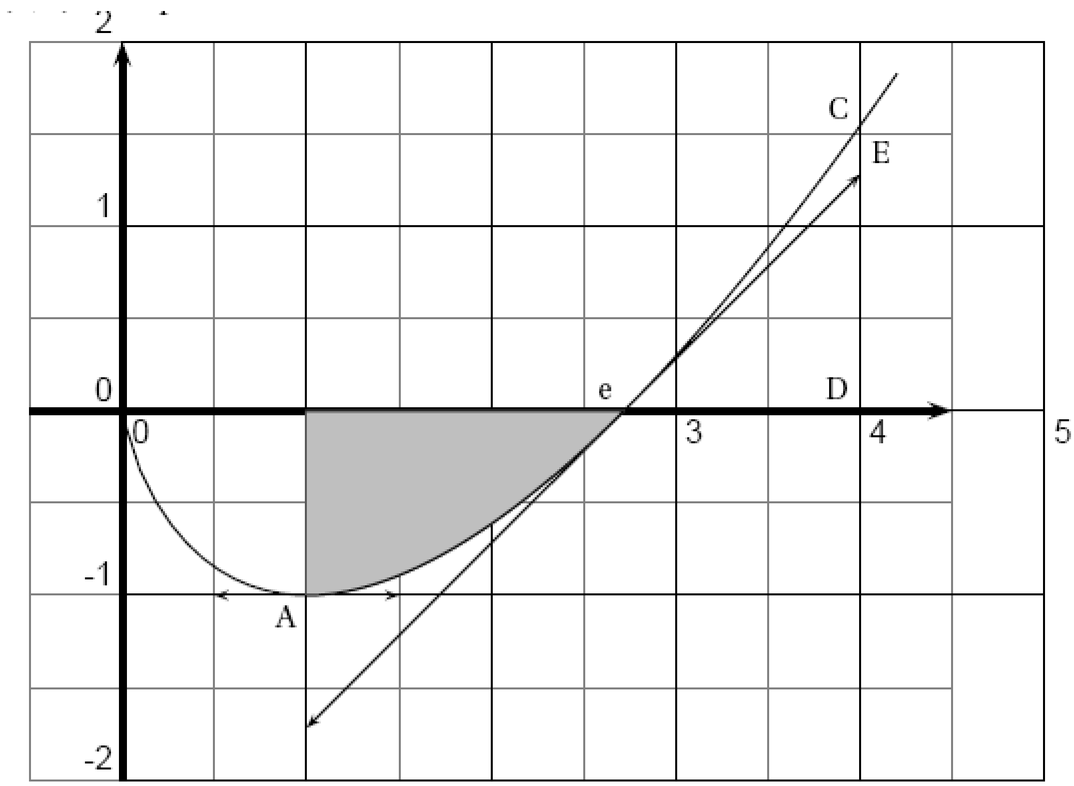
- la courbe (C_f) représentant une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$;
- deux tangentes à cette courbe : celle au point A d'abscisse 1 et celle du point B d'abscisse e.

La courbe (C_f) passe par le point $A(1;-1)$, $B(e;0)$ et $C(4;f(4))$.

La tangente en A est parallèle à l'axe des abscisses.

La tangente en B passe par le point E tel que $BD = DE$, où D est le point de coordonnées $(4;0)$ et E a pour abscisse 4.

Le nombre e est la base des logarithmes népériens.



1. Par lecture graphique, répondons aux questions suivantes :
   a. $f'(1) = 0$ et $f'(e) = \dfrac{y_E - y_B}{x_E - x_B} = \dfrac{(4-e)-0}{4-e} = 1$.
   b. Sur $]0;4]$: $f(x) < 0$ si $x \in]0;e[$ et $f'(x) < 0$ si $x \in]1;e[$
   c. Soit $\mathscr{A}$, en unités d'aire, une estimation de l'aire de la région colorée, région comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
   On a : $\mathscr{A} \simeq 1{,}1$.
2. On suppose que la fonction f précédente est définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x\ln x - x$.
   a. Calculons $f'(x)$ et déduisons les variations de f et les valeurs de $f'(1)$ et de $f'(e)$:
   On a :

$$f'(x) = 1\times\ln x + x\times\frac{1}{x} - 1 = \ln x \text{ d'où } f'(1) = 0 \text{ et } f'(e) = 1.$$

Tableau de variations de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

Conclusion :

La fonction f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

b. Montrons que la fonction F définie sur $]0;4]$ par $F(x)=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)$ est une primitive de f sur $]0;4]$:

On a :

$$F'(x)=\frac{2x}{2}\times\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)+\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}=x\ln x-\frac{3x}{2}+\frac{x}{2}=x\ln x-x=f(x).$$

c. Déduisons la valeur exacte de $\mathscr{A}$, en unités d'aire :

Sur $[1;e]$, $f(x)\leq 0$ donc l'aire cherchée en unité d'aire est :

$$-\int_1^e f(x)\,dx=-\left[F(x)\right]_1^e=-\left(F(e)-F(1)\right)=F(1)-F(e)\ u.a \text{ or } F(1)=-\frac{3}{4} \text{ et}$$

$$F(e)=-\frac{e^2}{4} \text{ donc l'aire vaut } \frac{e^2-3}{4}\ u.a.$$