

CORRECTION

EXERCICE n°20 :

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{4x+1}{(2x+1)^3}$.

On a :

$$\frac{a}{(2x+1)^2} + \frac{b}{(2x+1)^3} = \frac{a(2x+1)+b}{(2x+1)^3} = \frac{2ax+(a+b)}{(2x+1)^3}.$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} 2a = 4 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}.$$

D'où :

$$f(x) = \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{1}{(2x+1)^3}.$$

On a :

$$f(x) = \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{1}{2} \times \frac{2}{(2x+1)^3}.$$

Alors une primitive F de la fonction f est donnée par :

$$F(x) = -\frac{1}{(2-1)(2x+1)^{2-1}} - \frac{1}{2} \times \left[-\frac{1}{(3-1)(2x+1)^{3-1}} \right] = -\frac{1}{(2x+1)} + \frac{1}{4(2x+1)^2}.$$

On a :

$$\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = \frac{4}{9}.$$