

# CORRECTION

## EXERCICE n°1 :

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminons une primitive de la fonction  $f$  sur  $I$  :

➤  $f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}$  ;  $I = \mathbb{R}$  :

On a :  $F_1(x) = 2 \times \frac{x^{3+1}}{3+1} - 3 \times \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{1}{2} \times x = \frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x}{2}$ .

➤  $f_2(x) = -2x^4 + 3x - 1$  ;  $I = \mathbb{R}$  :

On a :  $F_2(x) = -2 \times \frac{x^{4+1}}{4+1} + 3 \times \frac{x^{1+1}}{1+1} - x = -\frac{2x^5}{5} + \frac{3x^2}{2} - x$ .

➤  $f_3(x) = -\frac{2}{x^3}$  ;  $I = ]0; +\infty[$  :

On a :  $f_3(x) = -2 \times x^{-3}$  alors  $F_3(x) = -2 \times \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ .

➤  $f_4(x) = \frac{3}{x^4}$  ;  $I = ]0; +\infty[$  :

On a :  $f_4(x) = 3 \times x^{-4}$  alors  $F_4(x) = 3 \times \frac{x^{-4+1}}{-4+1} = 3 \times \frac{x^{-3}}{-3} = -x^{-3} = -\frac{1}{x^3}$ .

➤  $f_5(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$  ;  $I = ]0; +\infty[$  :

On a :  $F_5(x) = x^2 + \sqrt{x}$ .

➤  $f_6(x) = 4x^3 + \frac{2}{x^3}$  ;  $I = ]0; +\infty[$  :

On a :  $f_6(x) = 4x^3 + 2 \times x^{-3}$  alors  $F_6(x) = 4 \times \frac{x^{3+1}}{3+1} + 2 \times \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = x^4 - x^{-2} = x^4 - \frac{1}{x^2}$ .

➤  $f_7(x) = (x+2)^3$  ;  $I = \mathbb{R}$  :

On a :  $f_7(x) = 1 \times (x+2)^3 = u'(x)u(x)^3$  avec  $u(x) = x+2$  alors :  $F_7(x) = \frac{u(x)^{3+1}}{3+1} = \frac{(x+2)^4}{4}$ .

➤  $f_8(x) = (1-2x)^4$  ;  $I = \mathbb{R}$  :

On a :  $f_8(x) = (1-2x)^4 = -\frac{1}{2} \times (-2) \times (1-2x)^4 = -\frac{1}{2} u'(x)u(x)^4$  avec  $u(x) = 1-2x$ .

Alors :  $F_8(x) = -\frac{1}{2} \frac{u(x)^{4+1}}{4+1} = -\frac{u(x)^5}{10} = -\frac{(1-2x)^5}{10}$ .

➤  $f_9(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\sqrt{x}+1)^3$  ;  $I = ]0; +\infty[$  :

On a :  $f_9(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\sqrt{x}+1)^3 = u'(x)u(x)^3$  avec  $u(x) = \sqrt{x}+1$  alors :  $F_9(x) = \frac{u(x)^4}{4} = \frac{(\sqrt{x}+1)^4}{4}$ .

➤  $f_{10}(x) = 2x(1-x^2)^5$  ;  $I = \mathbb{R}$  :

On a :  $f_{10}(x) = 2x(1-x^2)^5 = -(-2x)(1-x^2)^5 = -u'(x)u(x)^5$  avec  $u(x) = 1-x^2$ .

$$\text{Alors : } F_{10}(x) = -\frac{u(x)^6}{6} = -\frac{(1-x^2)^6}{6}.$$

$$\triangleright f_{11}(x) = (x-1)(x^2-2x+3)^3 ; I = \mathbb{R} :$$

$$\text{On a : } f_{11}(x) = \frac{1}{2}(2x-2)(x^2-2x+3)^3 = \frac{1}{2}u'(x)u(x)^3 \text{ avec } u(x) = x^2-2x+3.$$

$$\text{Alors : } F_{11}(x) = \frac{1}{2} \frac{u(x)^4}{4} = \frac{(x^2-2x+3)^4}{8}.$$

$$\triangleright f_{12}(x) = \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x^2+4\sqrt{x})^2 ; I = ]0; +\infty[ :$$

$$\text{On a : } f_{12}(x) = \frac{1}{2}\left(2x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)(x^2+4\sqrt{x})^2 = \frac{1}{2}u'(x)u(x)^2 \text{ avec } u(x) = x^2+4\sqrt{x}.$$

$$\text{Alors : } F_{12}(x) = \frac{1}{2} \frac{u(x)^3}{3} = \frac{(x^2+4\sqrt{x})^3}{6}.$$

$$\triangleright f_{13}(x) = \frac{1}{(1-2x)^3} ; I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[ :$$

$$\text{On a : } f_{13}(x) = \frac{1}{(1-2x)^3} = -\frac{1}{2} \times (-2)(1-2x)^{-3} = -\frac{1}{2}u'(x)u(x)^{-3} \text{ avec } u(x) = 1-2x.$$

$$\text{Alors : } F_{13}(x) = -\frac{1}{2} \frac{u(x)^{-3+1}}{-3+1} = \frac{u(x)^{-2}}{4} = \frac{1}{4u(x)^2} = \frac{1}{4(1-2x)^2}.$$

$$\triangleright f_{14}(x) = \frac{x^2+1}{(x^3+3x+5)^2} ; I = ]0; +\infty[ :$$

$$\text{On a : } f_{14}(x) = \frac{1}{3} \frac{3x^2+3}{(x^3+3x+5)^2} = \frac{1}{3} \times (3x^2+3)(x^3+3x+5)^{-2} = \frac{1}{3}u'(x)u(x)^{-2}.$$

$$\text{Alors : } F_{14}(x) = \frac{1}{3} \frac{u(x)^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{u(x)^{-1}}{3} = -\frac{1}{3u(x)} = -\frac{1}{3(x^3+3x+5)}.$$

$$\triangleright f_{15}(x) = \frac{x^2}{(x^3+1)^5} ; I = ]0; +\infty[ :$$

$$\text{On a : } f_{15}(x) = \frac{x^2}{(x^3+1)^5} = \frac{1}{3} \times \frac{3x^2}{(x^3+1)^5} = \frac{1}{3} \times (3x^2) \times (x^3+1)^{-5} = \frac{1}{3} \times u'(x) \times u(x)^{-5} \text{ avec } u(x) = x^3+1.$$

$$\text{Alors : } F_{15}(x) = \frac{1}{3} \frac{u(x)^{-5+1}}{-5+1} = -\frac{u(x)^{-4}}{12} = -\frac{1}{12u(x)^4} = -\frac{1}{12(x^3+1)^4}.$$

$$\triangleright f_{16}(x) = \frac{x^3-1}{x^2} ; I = ]0; +\infty[ :$$

$$\text{On a : } f_{16}(x) = \frac{x^3-1}{x^2} = x - \frac{1}{x^2} \text{ alors } F_{16}(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}.$$

$$\triangleright f_{17}(x) = \frac{x^3-x^2+2}{x^2} ; I = ]0; +\infty[ :$$

$$\text{On a : } f_{17}(x) = x - 1 + \frac{2}{x^2} \text{ alors : } F_{17}(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{2}{x}.$$

## **EXERCICE n°2 :**

Les fonctions  $f$  et  $g$  suivantes sont-elles deux primitives d'une même fonction sur un intervalle  $I$  :

1.  $f(x) = (x^2 + 2x)^2$  et  $g(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 1$  sur  $I = \mathbb{R}$  :

On a :

$$f'(x) = 2 \times (2x + 2)(x^2 + 2x) = (4x + 4)(x^2 + 2x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x .$$

$$g'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x .$$

Alors :  $f'(x) = g'(x)$  donc  $f$  et  $g$  sont deux primitives d'une même fonction sur un intervalle  $I$ .

2.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$  et  $g(x) = \frac{x^2 - 5x - 11}{x + 2}$  sur  $I = ]-2; +\infty[$ .

On a :

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - (x^2 - 1) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2} .$$

$$g'(x) = \frac{(2x-5)(x+2) - (x^2 - 5x - 11) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2} .$$

Alors :  $f'(x) = g'(x)$  donc  $f$  et  $g$  sont deux primitives d'une même fonction sur un intervalle  $I$ .

3.  $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+x+1}$  et  $g(x) = \frac{-x^2+3x-3}{2x^2+2x+2}$  sur  $I = \mathbb{R}$ .

On a :

$$f'(x) = \frac{2(x^2+x+1) - (2x-1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-2x^2+2x+3}{(x^2+x+1)^2} .$$

$$g'(x) = \frac{(-2x+3)(2x^2+2x+2) - (-x^2+3x-3)(4x+2)}{(2x^2+2x+2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-4x^3 - 4x^2 - 4x + 6x^2 + 6x + 6 + 4x^3 + 2x^2 - 12x^2 - 6x + 12x + 6}{(2x^2+2x+2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-8x^2 + 8x + 12}{(2x^2+2x+2)^2} = \frac{4(-2x^2+2x+3)}{4(x^2+x+1)^2} = \frac{-2x^2+2x+3}{(x^2+x+1)^2} .$$

Alors :  $f'(x) = g'(x)$  donc  $f$  et  $g$  sont deux primitives d'une même fonction sur un intervalle  $I$ .

4.  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$  et  $g(x) = \frac{x+4}{x^2+1}$  sur  $I = \mathbb{R}$ .

On a :

$$f'(x) = \frac{1 \times (x^2+1) - x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} .$$

$$g'(x) = \frac{1 \times (x^2+1) - (x+4) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-8x+1}{(x^2+1)^2}$$

Alors :  $f'(x) \neq g'(x)$  donc  $f$  et  $g$  ne sont pas deux primitives d'une même fonction sur un intervalle  $I$ .

**EXERCICE n°3 :**

Trouver la fonction  $f$  telle que pour tout  $x$  réel,  $f'(x) = 2x + 3$  et telle que la courbe représentative de la fonction  $f$  passe par le point  $A(-1; 2)$ .

*Solution :*

On a :  $f(x) = x^2 + 3x + c$  or  $f(-1) = 2$  donc  $(-1)^2 + 3 \times (-1) + c = 2 \Leftrightarrow c = 4$  d'où

$$f(x) = x^2 + 3x + 4.$$

**EXERCICE n°4 :**

Trouver la fonction  $f$ , définie sur  $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$  telle que :

- la fonction dérivée de  $f'$  est la fonction  $x \mapsto \frac{8}{(2x-1)^3}$  ;
- la courbe représentative de la fonction  $f$  admet au point  $A(1; 2)$  une tangente de coefficient directeur égal à 1.

*Solution :*

On a :  $f''(x) = \frac{8}{(2x-1)^3} = 4 \times 2(2x-1)^{-3} = 4u'(x)u(x)^{-3}$  avec  $u(x) = 2x-1$ .

$$\text{Alors : } f'(x) = 4 \times \frac{u(x)^{-2}}{-2} + c = -\frac{2}{u(x)^2} + c = -\frac{2}{(2x-1)^2} + c.$$

$$\text{De plus : } f'(1) = 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{(2 \times 1 - 1)^2} + c = 1 \Leftrightarrow c = 3 \text{ d'où } f'(x) = -\frac{2}{(2x-1)^2} + 3.$$

$$\text{Alors : } f(x) = \frac{1}{2x-1} + 3x + c \text{ or } f(1) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2 \times 1 - 1} + 3 + c = 2 \Leftrightarrow c = -2.$$

$$\text{Conclusion : } f(x) = \frac{1}{2x-1} + 3x - 2.$$

**EXERCICE n°5 : D'après Bac**

$f$  est la fonction définie sur  $] -1; +\infty [$  par :  $f(x) = \frac{2x^2 + 4x - 1}{(x+1)^2}$ .

1.  $a(x+1)^2 + b = a(x^2 + 2x + 1) + b = ax^2 + 2ax + (a+b)$  alors par identification, on a :  $a = 2$  et  $b = -3$

$$\text{Soit : } 2x^2 + 4x - 1 = 2(x+1)^2 - 3 \text{ et } f(x) = \frac{2x^2 + 4x - 1}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)^2 - 3}{(x+1)^2} = 2 - \frac{3}{(x+1)^2}.$$

2.  $f(x) = 2 - \frac{3}{(x+1)^2}$  donc  $F(x) = 2x + \frac{3}{x+1} + c$ .

**EXERCICE n°6 : D'après Bac**

1.  $u(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$  alors  $U(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2}$  et  $v(x) = \frac{1}{(x-1)^4}$  alors  $V(x) = -\frac{1}{3(x-1)^3}$ .

2. Soit la fonction  $f$  définie sur  $I$  par :  $f(x) = \frac{x}{(x-1)^4}$ .

a.  $f(x) = \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-1)^4} = \frac{a(x-1)+b}{(x-1)^4} = \frac{ax+(-a+b)}{(x-1)^4}$  soit par identification :  $a=1$  et  $b=1$

d'où :  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^4}$ .

b. On a alors :  $f(x) = u(x) + v(x)$  soit  $F(x) = U(x) + V(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3}$ .

**EXERCICE n°7 :**

➤  $I_1 = \int_1^4 dx = [x]_1^4 = 4-1=3$ .

➤  $I_2 = \int_0^1 (2x-3)(x^2-3x+2)^2 dx = \left[ \frac{(x^2-3x+2)^3}{3} \right]_0^1 = 0 - \frac{8}{3} = -\frac{8}{3}$ .

➤  $I_3 = \int_1^2 \frac{x-2}{(x^2-4x)^3} dx = \left[ -\frac{1}{4(x^2-4x)^2} \right]_1^2 = -\frac{1}{64} + \frac{1}{36} = \frac{7}{576}$ .

[www.maths-terminale-es.fr](http://www.maths-terminale-es.fr)