CORRECTION

EXERCICE n°1 :

1. Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\ln(x+1)-\ln x$.

   a. Justifions que $g(x)>0$ sur $]0;+\infty[$:

   Sur $]0;+\infty[$: $x+1>x$ or la fonction $\ln$ est strictement croissante donc

   $\ln(x+1)>\ln x \Leftrightarrow \ln(x+1)-\ln x>0$ soit $g(x)>0$.

   b. Déterminons la limite de la fonction g en 0 :

   On a :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1\\ \lim\limits_{X\to1}\ln X=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+}\ln(x+1)=0\\ \lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+}g(x)=+\infty$$

   c. Montrons que, sur $]0;+\infty[$, $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ et déduisons la limite g en $+\infty$:

$$g(x)=\ln(x+1)-\ln x=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\ln\left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1\\ \lim\limits_{X\to1}\ln X=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0.$$

   d. Démontrons que la fonction G, définie sur $]0;+\infty[$, par $G(x)=(x+1)\ln(x+1)-x\ln x$ est une primitive de la fonction g sur $]0;+\infty[$:

$$G'(x)=1\times\ln(x+1)+(x+1)\times\frac{1}{x+1}-\left(1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}\right)=\ln(x+1)-\ln x=g(x).$$

2. Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x+2+\ln(x+1)-\ln x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

   En utilisant les résultats du **1.**, justifions les affirmations suivantes :

   a. l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe (C) :

   $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=+\infty$ alors la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à la courbe (C) et cette droite est l'axe des ordonnées.

   b. la droite (D) d'équation $y=x+2$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(x+1)-\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0.$$

   c. la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) :

   $f(x)-(x+2)=\ln(x+1)-\ln x=g(x)>0$ sur $]0;+\infty[$.

   d. $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx=6\ln2-3\ln3+8$:

   Soit F une primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

   On a : $f(x)=x+2+g(x)$ alors $F(x)=\frac{x^2}{2}+2x+G(x)$.

Alors : $F(1)=\frac{5}{2}+2\ln 2$ et $F(3)=\frac{21}{2}+4\ln 4-3\ln 3=\frac{21}{2}+8\ln 2-3\ln 3$.

D'où : $\int_1^3 f(x)\,dx=F(3)-F(1)=\frac{21}{2}+8\ln 2-3\ln 3-\frac{5}{2}-2\ln 2=8+6\ln 2-3\ln 3$.