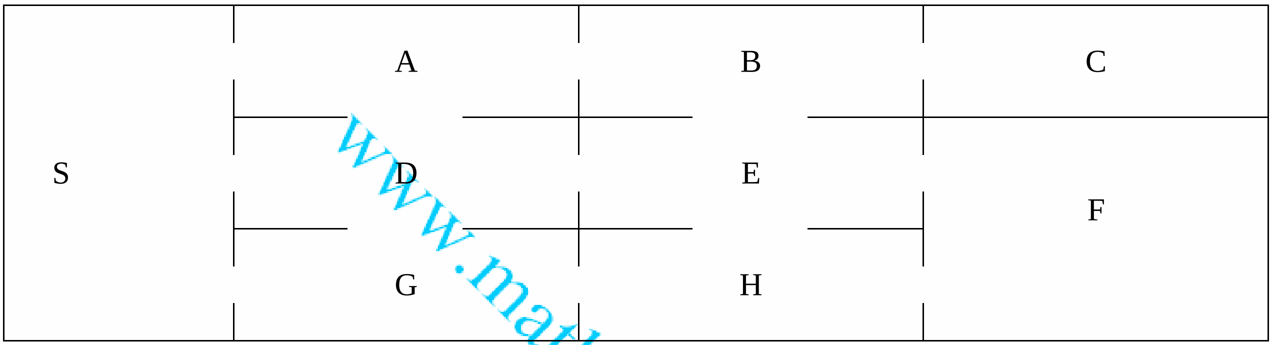
EXERCICE n°8 :

PARTIE A :

Un musée est constitué de neuf salles notées A, B, C, D, E, F, G, H et S. Le plan du musée est représenté ci-contre.
Ainsi, un visiteur qui se trouve dans la salle S peut atteindre directement les salles A, D ou G.
S'il se trouve dans la salle C, il peut se rendre directement dans la salle B, mais pas dans la salle F.
On s'intéresse au parcours d'un visiteur dans ce musée. On ne se préoccupe pas de la manière dont le visiteur accède au musée ni comment il en sort.



a. Dessiner un graphe modélisant la situation décrite.
b. Est-il possible de visiter le musée en empruntant chaque porte une fois et une seule ? Justifier en utilisant un théorème du cours sur les graphes.
c. Pour rompre une éventuelle monotonie, le conservateur du musée souhaite différencier chaque salle de sa ses salles voisines (c'est-à-dire accessible par une porte) par la moquette posée au sol. Quel est le nombre minimum de types de moquette nécessaires pour répondre à ce souhait ? Justifier.

PARTIE B :

On note M la matrice à 9 lignes et 9 colonnes associée au graphe précédent, en convenant de l'ordre suivant des salles : S, A, B, C, D, E, F, G et H. Le graphe n'étant pas orienté, comment cela se traduit-il sur la matrice ?

PARTIE C :

On donne la matrice :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 18 & 12 & 11 & 2 & 20 & 12 & 6 & 12 & 12 \\ 12 & 20 & 3 & 6 & 11 & 20 & 5 & 18 & 5 \\ 11 & 3 & 16 & 0 & 19 & 3 & 8 & 4 & 12 \\ 2 & 6 & 0 & 3 & 1 & 7 & 1 & 4 & 1 \\ 20 & 11 & 19 & 1 & 31 & 9 & 11 & 12 & 19 \\ 12 & 20 & 3 & 7 & 9 & 28 & 9 & 20 & 9 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 11 & 9 & 9 & 8 & 9 \\ 12 & 18 & 4 & 4 & 12 & 20 & 8 & 20 & 6 \\ 12 & 5 & 12 & 1 & 19 & 9 & 9 & 6 & 17 \end{pmatrix}$$

a. Combien y-a-t-il de chemins qui, en quatre étapes, partent de D et reviennent à D ?
b. Combien y-a-t-il de chemins qui, en quatre étapes, partent de S et arrivent à C ?
Les citer.
c. Est-il toujours possible de joindre en quatre étapes deux salles quelconques ? Justifier.