EXERCICE n°7 :

Un théâtre propose deux types d'abonnement pour une année : un abonnement A donnant droit à six spectacles ou un abonnement B donnant droit à trois spectacles.
On considèrent un groupe de 2 500 personnes qui s'abonnent tous les ans.
n étant un entier naturel, on note :

- a_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement A l'année n ;
- b_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement B l'année n ;
- P_n la matrice $\left(a_n \ b_n\right)$ traduisant l'état probabiliste à l'année n.

Tous les ans, 85 % des personnes qui ont choisi l'abonnement A et 55 % des personnes qui ont choisi l'abonnement B conservent ce type d'abonnement l'année suivante. Les autres personnes changent d'abonnement.

1. On suppose que, l'année zéro, 1 500 personnes ont choisi l'abonnement A et 1 000 l'abonnement B. Déterminer l'état initial $P_0 = \left(a_0 \ b_0\right)$.
2. a. Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.
   b. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.
   c. En déduire le nombre d'abonnés pour chaque type d'abonnement l'année un.
3. Soit $P = \left(x \ y\right)$ l'état stable, où x et y sont deux nombres réels positifs tels que $x + y = 1$.
   a. Justifier que x et y vérifient l'équation $x = 0,85x + 0,45y$.
   b. Déterminer x et y.
   c. En déduire la limite de la suite $\left(a_n\right)$ quand n tend vers $+\infty$.
   d. Interpréter le résultat précédent en terme de nombre d'abonnements de type A.