

CORRECTION

EXERCICE n°7 :

Un théâtre propose deux types d'abonnement pour une année : un abonnement A donnant droit à six spectacles ou un abonnement B donnant droit à trois spectacles.

On considère un groupe de 2 500 personnes qui s'abonnent tous les ans.

n étant un entier naturel, on note :

- a_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement A l'année n ;
- b_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement B l'année n ;
- P_n la matrice $(a_n \ b_n)$ traduisant l'état probabiliste à l'année n .

Tous les ans, 85 % des personnes qui ont choisi l'abonnement A et 55 % des personnes qui ont choisi l'abonnement B conservent ce type d'abonnement l'année suivante. Les autres personnes changent d'abonnement.

1. On suppose que, l'année zéro, 1 500 personnes ont choisi l'abonnement A et 1 000 l'abonnement B. Déterminons l'état initial $P_0 = (a_0 \ b_0)$:

On a :

$$P_0 = (a_0 \ b_0) = \left(\frac{1500}{2500} \quad \frac{1000}{2500} \right) = \left(\frac{3}{5} \quad \frac{2}{5} \right).$$

2. La matrice de transition M du graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}.$$

La proportion d'abonnés pour chaque type d'abonnement à l'année 1 est donnée par :

$$P_1 = P_0 M = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix} = (0,6 \times 0,85 + 0,4 \times 0,45 \quad 0,6 \times 0,15 + 0,4 \times 0,55)$$

$$P_1 = (0,69 \quad 0,31).$$

Le nombre d'abonnés pour chaque type d'abonnement est :

$$2500 \times (0,69 \quad 0,31) = (1775 \quad 775)$$

soit 1 775 personnes ont choisi l'abonnement A et 775 personnes ont choisi l'abonnement B.

3. Soit $P = (x \ y)$ l'état stable, où x et y sont deux nombres réels positifs tels que $x + y = 1$.

On a : $x \in [0;1]$, $y \in [0;1]$ et $x + y = 1$.

De plus : $P = PM$ alors :

$$(x \ y) = (x \ y) \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x \ y) = (0,85x + 0,45y \quad 0,15x + 0,55y).$$

D'où le système suivant :

$$\begin{cases} x = 0,85x + 0,45y \\ y = 0,15x + 0,55y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,15x - 0,45y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,75 \\ y = 0,25 \end{cases}.$$

Il résulte que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n = 0,75$.

Cela signifie qu'à terme, les trois quarts des personnes choisiront l'abonnement A.