

CORRECTION

EXERCICE n°14 :

1. Ecrivons la matrice de transition :

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

2. Calculons l'état de la probabilité de l'individu au bout de trois mois, de six mois, d'un an pour chacune des situation suivantes :

➤ Au départ, il est immunisé :

On a :

$$P_0 = (1 \ 0 \ 0).$$

De plus :

$$P_3 = P_0 \times M^3 = (1 \ 0 \ 0) \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}^3 = (1 \ 0 \ 0) \times \begin{pmatrix} 0,769 & 0,08 & 0,151 \\ 0,824 & 0,048 & 0,128 \\ 0,64 & 0,195 & 0,165 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = (0,769 \ 0,08 \ 0,151).$$

Conclusion :

Au bout de trois mois, la probabilité qu'il soit :

- Immunisé est de 76,9 %.
- Malade est de 8 %.
- Non immunisé est de 15,1 %.

$$P_6 = P_0 \times M^6 = (1 \ 0 \ 0) \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}^6 = (1 \ 0 \ 0) \times \begin{pmatrix} 0,753921 & 0,094805 & 0,151274 \\ 0,755128 & 0,093184 & 0,151688 \\ 0,75844 & 0,092735 & 0,148825 \end{pmatrix}$$

$$P_6 = (0,753921 \ 0,094805 \ 0,151274).$$

Conclusion :

Au bout de six mois, la probabilité qu'il soit :

- Immunisé est de 75,4 %.
- Malade est de 9,5 %.
- Non immunisé est de 15,1 %.

$$P_{12} = P_0 \times M^{12} = (1 \ 0 \ 0) \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}^{12} = (1 \ 0 \ 0) \times \begin{pmatrix} 0,754719 & 0,094338 & 0,150943 \\ 0,754719 & 0,0934 & 0,150941 \\ 0,754705 & 0,94347 & 0,150948 \end{pmatrix}$$

$$P_{12} = (0,754719 \ 0,094338 \ 0,150943).$$

Conclusion :

Au bout d'un an, la probabilité qu'il soit :

- Immunisé est de 75,5 %.
- Malade est de 9,4 %.

- Non immunisé est de 15,1 %.

➤ Au départ, il est non malade et non immunisé :

On a :

$$P_0 = (0 \quad 0 \quad 1).$$

Conclusion :

Au bout de trois mois, la probabilité qu'il soit :

- Immunisé est de 64 %.
- Malade est de 19,5 %.
- Non immunisé est de 16,5 %.

Au bout de six mois, la probabilité qu'il soit :

- Immunisé est de 75,8 %.
- Malade est de 9,3 %.
- Non immunisé est de 14,9 %.

Au bout d'un an, la probabilité qu'il soit :

- Immunisé est de 75,5 %.
- Malade est de 9,4 %.
- Non immunisé est de 15,1 %.

➤ Au départ, il est malade.

On a :

$$P_0 = (0 \quad 1 \quad 0).$$

Au bout de trois mois, la probabilité qu'il soit :

- Immunisé est de 82,4 %.
- Malade est de 4,8 %.
- Non immunisé est de 12,8 %.

Au bout de six mois, la probabilité qu'il soit :

- Immunisé est de 75,5 %.
- Malade est de 9,3 %.
- Non immunisé est de 15,2 %.

Au bout d'un an, la probabilité qu'il soit :

- Immunisé est de 75,5 %.
- Malade est de 9,4 %.
- Non immunisé est de 15,1 %.