

CORRECTION

EXERCICE n°12 :

Un guide touristique classe chaque année les hôtels d'une certaine région en deux catégories selon la qualité de leurs prestations. Les plus confortables sont classés dans la catégorie A, les autres dans la catégorie B. On constate que, chaque année, 5 % des hôtels de la catégorie A sont relégués dans la catégorie B, alors que 20 % des hôtels de la catégorie B sont promus dans la catégorie A.

1. Matrice de transition du graphe en respectant l'ordre alphabétique :

On a :

$$M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

2. En 2002, le classement était tel que le quart des hôtels étaient classés dans la catégorie A. Calculons l'état de l'année 2003, puis l'état de l'année 2004 :

On a :

$$P_0 = (0,25 \quad 0,75).$$

De plus :

$$P_1 = P_0 \times M \quad \text{et} \quad P_2 = P_1 \times M.$$

Alors :

$$P_1 = P_0 \times M = (0,25 \quad 0,75) \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = (0,25 \times 0,95 + 0,75 \times 0,2 \quad 0,25 \times 0,05 + 0,75 \times 0,8)$$

$$P_1 = (0,3875 \quad 0,6125).$$

Alors en 2003, 38,75 % des hôtels étaient dans la catégorie A et 61,25 % dans la catégorie B.

On a :

$$P_1 = (0,3875 \quad 0,6125).$$

Alors :

$$P_2 = P_1 \times M = (0,3875 \quad 0,6125) \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = (0,3875 \times 0,95 + 0,6125 \times 0,2 \quad 0,3875 \times 0,05 + 0,6125 \times 0,8)$$

$$P_2 = (0,490625 \quad 0,509375).$$

Alors en 2003, 49,0625 % des hôtels étaient dans la catégorie A et 50,9375 % dans la catégorie B.

3. L'état $(0,5 \quad 0,5)$ n'est pas stable car :

$$(0,5 \quad 0,5) \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = (0,5 \times 0,95 + 0,5 \times 0,2 \quad 0,5 \times 0,05 + 0,5 \times 0,8)$$

$$(0,5 \quad 0,5) \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = (0,575 \quad 0,425) \neq (0,5 \quad 0,5).$$

4. Trouvons l'état vers lequel converge ce système :

Soit $P = (x \quad y)$ avec $P = P \times M$ et $x + y = 1$.

On obtient alors ce système :

$$\begin{cases} P = P \times M \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x \ y) = (x \ y) \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,95x + 0,2y \\ y = 0,05x + 0,8y \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P = P \times M \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,05x - 0,2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 20y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,8 \\ y = 0,2 \end{cases}$$

Cela signifie qu'à terme, 80 % des hôtels seront dans la catégorie A et 20 % dans la catégorie B.