EXERCICE n°34 :

Le but de ce problème est l'étude de deux fonctions qui modélisent les importations et les exportations d'une entreprise.

Partie A : étude de fonctions

Les fonctions f et g sont définies sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{36}{8+e^{-x}} \quad \text{et} \quad g(x)=2\ln(x+1)+2,5.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. (unité : 2 cm)

1. Etudier les variations de f et g.
   Calculer les limites de f et g en $+\infty$.
2. Représenter graphiquement ces deux fonctions.
   On nommera leurs courbes respectivement (C_f) et (C_g), et on se limitera aux valeurs de x entre 0 et 6.

Partie B : étude de la fonction $h=g-f$

Le but de cette question est d'étudier le signe de $h'(x)$ afin d'établir le tableau des variations de h sur $[0;+\infty[$.

1. Calculer la dérivée h' de h.
2. Vérifier que : $e^x\times h'(x)=\dfrac{2e^x}{x+1}-\dfrac{36}{\left(8+e^{-x}\right)^2}$.

   On rappelle que, pour tout $x\in[0;+\infty[$, $e^x\geq x+1$: établir que $\left(8+e^{-x}\right)^2\geq 64$.

   En utilisant successivement ces deux résultats, établir que :

   $$e^x\times h'(x)\geq\frac{2e^x}{x+1}-\frac{9}{16} \quad \text{et} \quad e^x\times h'(x)\geq 2-\frac{9}{16}.$$

   Etablir le tableau des variations de h.

   Montrer que $h(x)$ s'annule pour une seule valeur x_0 comprise entre 0 e et 6.

   Déterminer une encadrement de x_0 de largeur 10^{-2}.

Partie C : application

Notation : x désigne le temps en années.
On pose $x=0$ au premier janvier 2000.
Pour l'entreprise :

- $f(x)$ désigne le montant, en centaines de milliers d'euros, des achats pour l'année x
- et $g(x)$ désigne le montant, en centaines de milliers d'euros, de ses ventes.

1. Quel est le montant des achats et des ventes de cette entreprise à la fin de l'année 2000 ?
2. A partir d'une certaine date, les ventes l'emportent sur les achats.
   a. Déterminer l'année au cours de laquelle les ventes l'emportent sur les achats.
   b. Indiquer alors le rang de la semaine

www.maths-terminale-es.fr