EXERCICE n°33 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.

Partie A : étude d'une fonction

1. Calculer la limite de f en $-\infty$.
2. Montrer que pour tout x : $f(x) = x^2 e^{-x} + 2xe^{-x} + e^{-x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
   Quelle interprétation graphique peut-on faire ?
3. Soit f' la fonction dérivée de f.
   Calculer $f'(x)$.
4. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
5. Etablir les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Résumer cette étude dans un tableau.
6. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $[1;3]$.
   Donner un encadrement décimal de x_0 d'amplitude 10^{-2}.
7. Construire dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C), la tangente (T), ainsi que les tangentes horizontales à la courbe (C). (unité graphique : 2 cm)

Partie B : étude de la fonction inverse

1. Montrer que f est strictement positive sur $[0;+\infty[$.
2. On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
   Calculer $g(0)$, $g(1)$ et $g(x_0)$.
3. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
4. Dresser le tableau des variations de g sur $[0;+\infty[$ en donnant les justifications nécessaires.