CORRECTION

EXERCICE n°9 :

1. Déterminons les racines du polynôme $P(X)=2X^2+9X-5$:

   On a :

   $$P(X)=0 \Leftrightarrow X=\frac{1}{2} \quad ou \quad X=-5.$$

2. Etudions le signe de e^x+5 et de $2e^x-1$:

   On a :

   - $e^x+5>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   - $2e^x-1>0 \Leftrightarrow 2e^x>1 \Leftrightarrow e^x>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x>-\ln 2$.

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
e^x+5		$+$		$+$	
$2e^x-1$		$-$	0	$+$	

3. Résolvons l'inéquation $2e^{2x}+9e^x-5>0$:

   Cette inéquation est définie sur $\mathbb{R}$.

   On a :

   $$2e^{2x}+9e^x-5=2\left(e^x\right)^2+9e^x-5.$$

   Donc si on pose $X=e^x$, on obtient :

   $$2e^{2x}+9e^x-5=2\left(e^x\right)^2+9e^x-5=2X^2+9X-5=P(X).$$

   Or de la question 1., on a :

   $$P(X)=2\left(X-\frac{1}{2}\right)(X+5)=(2X-1)(X+5).$$

   D'où :

   $$2e^{2x}+9e^x-5=(2X-1)(X+5)=\left(2e^x-1\right)\left(e^x+5\right).$$

   On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
e^x+5		$+$		$+$	
$2e^x-1$		$-$	0	$+$	
$2e^{2x}+9e^x-5$		$-$	0	$+$	

   D'où :

   $$S=\left]-\ln 2;+\infty\right[.$$