CORRECTION

<u>EXERCICE n°35</u> :

Partie A :

1. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=(ax+b)e^{-x}+c$.
   1. Calcul de $g'(x)$:
      On a :
      $$g'(x)=a\times e^{-x}-(ax+b)e^{-x}=\left[-ax+(a-b)\right]e^{-x}.$$
   2. On a :
      - $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(ax+b)e^{-x}+c\right]=c$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2$ donc $c=2$.
      - De plus :
        $$\begin{cases} g'(2)=0 \\ g(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a-b=0 \\ b+c=1 \end{cases}.$$
      - Conclusion :
        $$\begin{cases} -a-b=0 \\ b+c=1 \\ c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases} \text{ soit : } g(x)=(x-1)e^{-x}+2.$$

2. Sur l'intervalle $[-1;0]$:
   - La fonction g continue ;
   - La fonction g est croissante ;
   - $g(-1)<0$ et $g(0)>0$;

   Donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique sur l'intervalle $[-1;0]$.
   On a :
   $$\begin{matrix} -0,4<\alpha<-0,3 \\ -0,38<\alpha<-0,37 \end{matrix} \text{ donc } \alpha\simeq-0,4.$$

3. Signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$:
   On a :
   $$\begin{cases} g(x)=0 & si \quad x=\alpha \\ g(x)>0 & si \quad x\in\,]\alpha;+\infty[\\ g(x)<0 & si \quad x\in\,]-\infty;\alpha[\end{cases}.$$

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$.

1. Limite de la fonction f en $+\infty$:
   On a :
   $$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}\right)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty.$$

Limite de la fonction f en $-\infty$:
On a :

$$f(x) = x\left(2 + \frac{1}{x} - e^{-x}\right).$$

Alors :

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \\ &\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}\right) = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(2 + \frac{1}{x} - e^{-x}\right) = -\infty \\ &\lim_{x\to-\infty}(x) = -\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

2. On a :

$$f'(x) = 2 - \left[1\times e^{-x} + x\times(-1)\times e^{-x}\right] = g(x).$$

Tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Conclusion :

La fonction f est décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;+\infty[$.

3. On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - (2x+1)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}\right) = 0$$

Alors la droite (D) d'équation $y = 2x+1$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

On a :

$$\begin{cases} f(x) - (2x+1) = 0 & si \quad x = 0 \\ f(x) - (2x+1) > 0 & si \quad x \in]-\infty;0[\\ f(x) - (2x+1) < 0 & si \quad x \in]0;+\infty[\end{cases}.$$

Conclusion :

La droite (D) coupe la courbe (C) au point d'abscisse 0.

La courbe (C) est en dessous de la droite (D) sur $[0;+\infty[$.

La courbe (C) est au dessus de la droite (D) sur $]-\infty;0]$.

4. Représentation graphique :