CORRECTION

EXERCICE n°34 :

Partie A : étude de fonctions

Les fonctions f et g sont définies sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{36}{8+e^{-x}}$ et $g(x)=2\ln(x+1)+2,5$.

1. Etude des variations des fonctions f et g :
   On a :

$$f'(x)=36\times-\frac{-e^{-x}}{\left(8+e^{-x}\right)^2}=\frac{e^{-x}}{\left(8+e^{-x}\right)^2}>0 \text{ et } g'(x)=\frac{2}{x+1}>0.$$

   Conclusion :

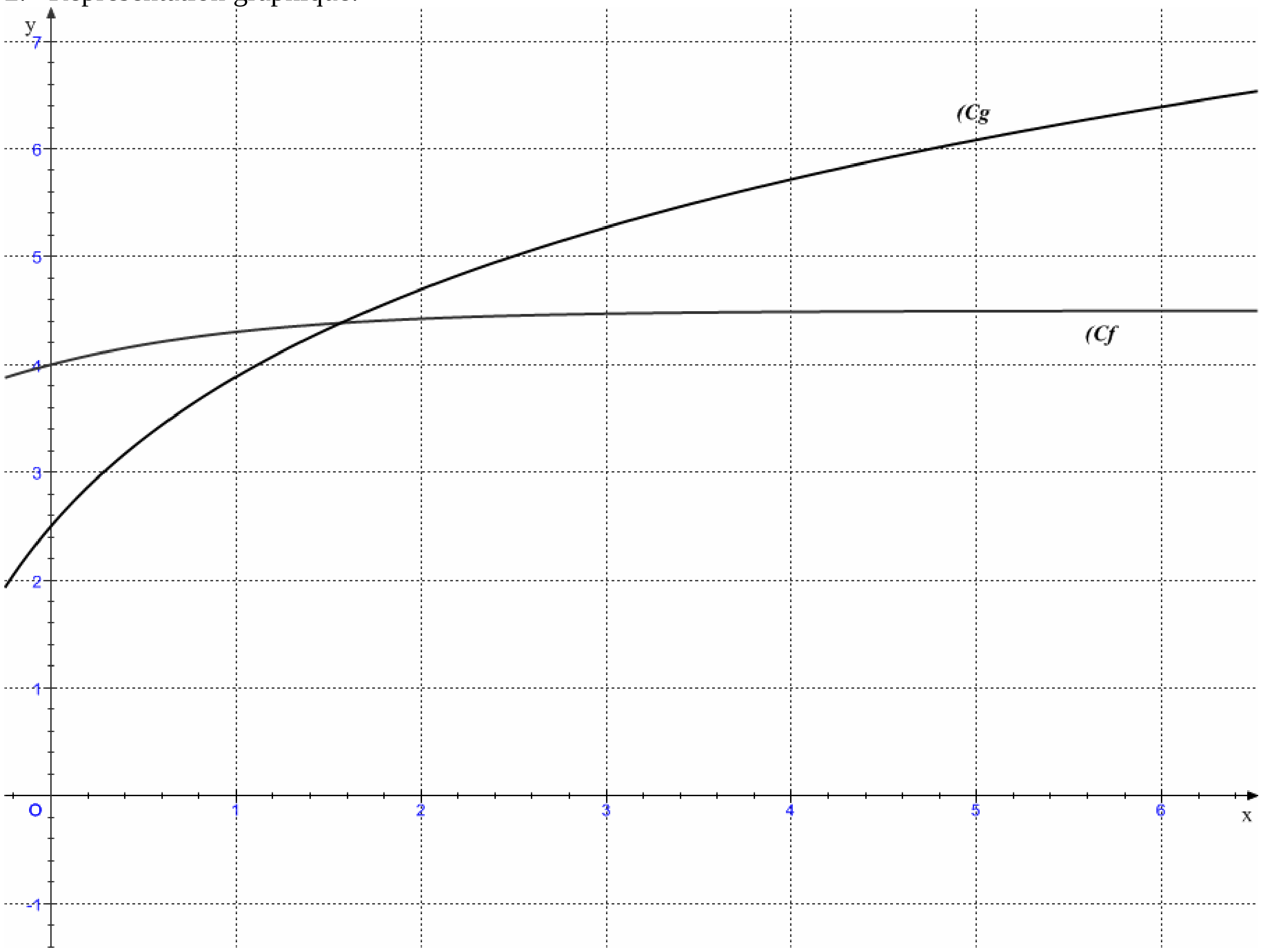
   Les fonctions f et g sont croissantes sur $[0;+\infty[$.

   Limites de f et g en $+\infty$:
   On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}\right)=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{36}{8}=\frac{9}{2}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x+1)=\lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty\\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty}\ln X=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty.$$

2. Représentation graphique:



Partie B : étude de la fonction $h = g - f$

1. Calcul de la dérivée de la fonction h :
   On a :
   $$h'(x) = g'(x) - f'(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{e^{-x}}{\left(8+e^{-x}\right)^2}.$$

2. On a :
   $$e^x h'(x) = e^x\left[\frac{2}{x+1} - \frac{e^{-x}}{\left(8+e^{-x}\right)^2}\right] = \frac{2e^x}{x+1} - \frac{1}{\left(8+e^{-x}\right)^2}.$$

   On a :
   $$e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow 8+e^{-x} \geq 8 \Leftrightarrow \left(8+e^{-x}\right)^2 \geq 64.$$

   On a :
   $$\left(8+e^{-x}\right)^2 \geq 64 \Leftrightarrow \frac{1}{\left(8+e^{-x}\right)^2} \leq \frac{1}{64} \Leftrightarrow \frac{36}{\left(8+e^{-x}\right)^2} \leq \frac{36}{64} \Leftrightarrow \frac{36}{\left(8+e^{-x}\right)^2} \leq \frac{9}{16} \Leftrightarrow -\frac{36}{\left(8+e^{-x}\right)^2} \geq -\frac{9}{16}.$$

   On a :
   $$e^x \geq x+1 \Leftrightarrow \frac{2e^x}{x+1} \geq 2.$$

   D'où :
   $$e^x h'(x) = \frac{2e^x}{x+1} - \frac{1}{\left(8+e^{-x}\right)^2} \geq 2 - \frac{9}{16} > 0 \Leftrightarrow h'(x) > 0.$$

   Tableau de variation de la fonction h :

x	0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$-1,5$	$\nearrow$	$+\infty$

   Conclusion :
   La fonction h est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

   Sur l'intervalle $[0;6]$:
   - La fonction h est continue ;
   - La fonction h est croissante ;
   - $h(0) < 0$ et $h(6) > 0$;

   Conclusion :

Sur l'intervalle $[0;6]$, l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique x_0.

On a :

$0 < x_0 < 6$

$1 < x_0 < 2$

$1,5 < x_0 < 1,6$

$1,56 < x_0 < 1,57.$

Partie C : application

1. On a $f(1) \simeq 4,30217$ donc le montant des achats est de 430 217 euros.
   On a $g(1) \simeq 3,88629$ donc le montant des ventes est de 388 629 euros.

2. On a :
   $f(2) \simeq 4,42514$ et $g(2) \simeq 4,69722$.
   Conclusion :
   Au cours de l'année 2001, les ventes l'emportent sur les achats.

3. D'après l'étude faite dans la partie B., l'abscisse du point d'intersection des courbes (Cf) et (Cg) est x_0 avec $1,56 < x_0 < 1,57$. Or $52 \times 1,56 = 29,12$ et $52 \times 1,57 = 29,64$ par conséquent le rang de la semaine en 2001 est 29.